

Conocimiento matemático para enseñar la pendiente de rectas cartesianas. Un estudio con profesores de secundaria

Mathematical knowledge to teach the slope of Cartesian lines. A study with middle school teachers

DAVID ALFONSO PÁEZ • DANIEL EUDAVE MUÑOZ

David Alfonso Páez. Universidad Autónoma de Aguascalientes, México. Es catedrático CONACYT y profesor-investigador del Departamento de Educación de la UAA. Integrante del Sistema Nacional de Investigadores, Nivel I. Sus líneas de investigación son formación docente en matemáticas y competencias intelectuales y académicas básicas. Correo electrónico: dapaez@correo.uaa.mx. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4499-4452>.

Daniel Eudave Muñoz. Universidad Autónoma de Aguascalientes, México. Es profesor-investigador del Departamento de Educación de la UAA. Integrante del Sistema Nacional de Investigadores, Nivel I, y tiene perfil PRODEP. Sus líneas de investigación son educación estadística y competencias básicas en educación superior. Correo electrónico: deudave@correo.uaa.mx. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4070-310>.

Resumen

El estudio aquí descrito tiene como objetivo identificar el conocimiento matemático que el docente de educación secundaria tiene en torno al concepto de pendiente de rectas cartesianas. La recopilación de datos se desarrolló mediante una encuesta, que incluía preguntas abiertas sobre el significado y relevancia de enseñar este concepto tomando como referente el currículo escolar mexicano. Se tuvo una participación de 316 profesores de escuelas públicas y que imparten matemáticas en los diferentes grados de educación secundaria. Los resultados muestran que los docentes tienen un conocimiento matemático básico sobre la pendiente de rectas cartesianas, en particular, este conocimiento está relacionado con la definición y propiedades de la pendiente vistas desde tres áreas de la matemática: álgebra, geometría y trigonometría. Aunque los resultados muestran un conocimiento acorde con el currículo matemático de educación secundaria, se requieren estudios encaminados a favorecer la reflexión en el profesor sobre la relación entre razón de cambio, inclinación y pendiente de la recta para evitar posibles errores de comprensión en los estudiantes.

Palabras clave: Álgebra, conocimiento matemático, enseñanza de las matemáticas, educación secundaria.

Abstract

This study aims to identify the mathematical knowledge that middle school teachers have about the concept of slope in the Cartesian lines. The data collection was carried out through a survey, with questions about the meaning and relevance of teaching this mathematical concept, taking the school curriculum as a reference. The study involved 316 teachers from public schools who teach mathematics in different grades of middle school. The results show that teachers have a basic mathematical knowledge about the slope of Cartesian lines, in particular, this knowledge is related to the definition and properties of the slope seen from three areas of mathematics: algebra, geometry and trigonometry. Although the results show a mathematical knowledge in accordance with the middle school mathematical curriculum, studies that favor teacher reflection on their knowledge about the relationship between rate of change, inclination and slope of the line to avoid compression errors in students are required.

Keywords: Algebra, mathematical knowledge, teaching Mathematics, middle school.

ANTECEDENTES

En las últimas cuatro décadas los investigadores en educación han centrado su interés en indagar aspectos relacionados con la práctica y formación del profesor (Ávila, 2016; Sfard, 2005), debido al impacto que tiene en el aprendizaje y desempeño académico de los estudiantes, así como la relación que existe entre su quehacer y conocimiento (Ávila, 2016; Jaworski, 2006; Rico et al., 2014). Uno de los aspectos que ha cobrado mayor relevancia en la educación matemática es el conocimiento que debe tener el docente para enseñar matemáticas (NCTM, 2014; Hill y Ball, 2009; Carrillo et al., 2013), ya que orienta sus acciones y decisiones dentro y fuera del salón de clases, y es base para favorecer el aprendizaje escolar de las matemáticas (Hill y Ball, 2009; Jaworski, 2006).

El estudio sobre el conocimiento del profesor surgió a partir del trabajo desarrollado por Shulman (1986, 1987), quien plantea, al igual que la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2014), que la enseñanza requiere de docentes con habilidades didácticas y de conocimiento disciplinar a transmitir a los estudiantes. En relación con este último, el maestro debe poseer un conocimiento determinado y necesario según la asignatura que enseña, pues “no parece razonable que alguien sea capaz de enseñar aquello que no conoce a profundidad” (Fennema, Carpenter y Peterson, 1989, citados en Escudero et al., 2015, p. 54). Asimismo, Hill, Ball y Schilling (2008) mencionan que este conocimiento es el que debe utilizar el maestro con la finalidad de “producir aprendizaje y crecimiento en sus estudiantes” (p. 374). Por tanto, la tarea del profesor demanda dominio disciplinar y, a su vez, de habilidades para desarrollar su labor de enseñanza (Carrillo et al., 2013; Sosa, 2011). El trabajo de Shulman (1986, 1987) da cuenta de la importancia de estudiar el conocimiento docente para la enseñanza y reconoce la relevancia de vincularlo con el contenido de la asignatura, ya que es un aspecto clave para la tarea de enseñanza.

En la actualidad, al maestro que se dedica a enseñar matemáticas se le exige un amplio conocimiento que le permita desempeñar su labor dentro y fuera del aula (Hill et al., 2005; NCTM, 2014; Carrillo et al., 2013; Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez, 2019), es decir, un conocimiento como objeto de enseñanza y, a su vez, como un objeto de aprendizaje (Escudero et al., 2015; Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez, 2019). En México, se espera que el profesor de educación secundaria –que atiende estudiantes de 12 a 14 años de edad– tenga, como parte de su bagaje matemático, dominio sobre el concepto de razón de cambio, en especial que lo vincule con la pendiente o inclinación de rectas trazadas en el sistema de coordenadas cartesianas (SEP, 2017). En este sentido, se le pide un conocimiento sobre la definición y representación de la pendiente de rectas cartesianas, así como su cálculo mediante la razón de cambio, de modo que los estudiantes de tercer grado de secundaria logren comprender esta propiedad de rectas trazadas en el plano cartesiano.

En el contexto internacional, investigadores como Stump (2001) aseguran que el profesor debe tener claro a qué se refiere la pendiente de la recta cartesiana y cómo

se vincula con otros conceptos matemáticos, como la razón de cambio, variable o derivada. En el trabajo desarrollado por Teuscher y Reys (2010), diversos maestros definen y representan geoméricamente la pendiente en términos de razón de cambio (dados dos puntos, como una relación de lo que sube entre lo que avanza), por su parte, Nagle, Casey y Moore-Russo (2017) afirman que los profesores prefieren asociar este concepto a contextos o situaciones del mundo real. Asimismo, Flores y Mosquera (2022) reportan un estudio sobre el currículo escolar colombiano, los resultados muestran que este concepto matemático en educación secundaria se enfatiza como un coeficiente paramétrico e indicador del comportamiento de la recta. En el trabajo desarrollado por Páez (2015) se encontró que los profesores involucrados en el estudio se apegan a lo que demanda el currículo escolar para llevar a los estudiantes a comprender la pendiente de recta en términos de razón de cambios, pero hacen sus propias interpretaciones del concepto, lo que podría generar dificultades de comprensión. Aunque las investigaciones muestran que se favorece el significado de la pendiente como una razón de cambio, esto debido tal vez para posteriormente entender el concepto de derivada en educación media superior, a los estudiantes se les dificulta comprender la inclinación de la recta en términos de cómo el valor de una variable está en función de otra (Stump, 1999). De acuerdo con lo anterior, el presente estudio tiene el objetivo de identificar el conocimiento matemático, desde la perspectiva del profesor de educación secundaria en México, que se requiere en torno a la pendiente de rectas cartesianas.

MARCO CONCEPTUAL

Para la enseñanza de las matemáticas, y una buena práctica, el profesor debe tener un dominio del contenido y de su didáctica (Socas, 2011). Investigadores como Mochón y Morales (2010) y Planas (2009) consideran que, para proveer al estudiante de razones y explicaciones adecuadas, es fundamental que el docente comprenda y analice los contenidos matemáticos a enseñar; en otros términos, que tenga un amplio bagaje de conocimiento matemático (Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2014; Fennema y Franke, 1992; Shulman, 1986, 1987).

A partir del trabajo de Shulman (1986, 1987) han surgido diversos modelos para reflexionar y caracterizar el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas (Hill et al., 2008; Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2014). Por ejemplo, Ball et al. (2008) caracterizan el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas a partir de la lista categórica propuesta por Shulman (1987), de modo que consideran que el conocimiento matemático del profesor es el dominio (comprensión) sobre los objetos matemáticos; en otras palabras, “el profesor necesita [...] saber por qué esto es así, sobre qué supuestos pueden ser ciertas estas justificaciones y bajo qué circunstancias nuestras creencias en estas justificaciones pueden ser débiles y aún denegadas” (Shulman, 1986, p. 9).

Aunque hay diferencias en estos modelos teóricos, son una herramienta referencial para aproximarse al conocimiento para la enseñanza de las matemáticas (Carrillo, 2010) y en ellos se reconoce la importancia de la labor del profesor, así como el tipo de conocimiento matemático que debe poseer para transmitirlo al alumnado (Hill et al., 2008), el cual involucra identificar errores procedimentales, algorítmicos o conceptuales, así como usar conceptos relacionados con las matemáticas, determinar la validez de un argumento matemático y seleccionar representaciones adecuadas.

Uno de esos modelos es la propuesta de Carrillo et al. (2014), quienes plantean el *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. En esta propuesta, el conocimiento matemático se refiere a la comprensión de conceptos, estructuras y procedimientos matemáticos que debe tener todo aquel que se dedica a la enseñanza de las matemáticas, así como saber la conexión entre los conceptos y su uso en la práctica a través y para la resolución de problemas (Carrillo et al., 2014; Fennema y Franke, 1992), además incluye formas de hacer o crear nuevo conocimiento (Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez, 2019). De acuerdo con Carrillo et al. (2014), el conocimiento matemático abarca tres dominios principales:

- *Conocimiento de los temas*, es el saber sobre las matemáticas y de la matemática escolar, como las propiedades, fundamentos teóricos, procedimientos, aspectos fenomenológicos, ejemplos, definiciones, significados de conceptos abordados o las representaciones del contenido. En relación con lo anterior, “el profesor está obligado a dominar los conceptos matemáticos más allá de lo que sus alumnos saben o aprenden de acuerdo con los objetivos del currículum [sic]” (Medina, 2018, p. 32). Al respecto, Carrillo et al. (2018, citados en Zakaryan y Sosa, 2021, pp. 75-76) afirman que este tipo de conocimiento hace referencia

...a qué y de qué manera conoce el profesor de matemáticas los tópicos que enseña, es decir, al conocimiento del profesor de los procedimientos involucrados en un tópico, de los registros de representación, de la fenomenología (incluye usos y aplicaciones) asociada al tópico abordado, de las definiciones (incluye imágenes y ejemplos de objetos matemáticos) y de las propiedades y sus principios, y en sí, al conocimiento profundo del contenido matemático y sus significados.

- *Conocimiento de la estructura de las matemáticas*, es el dominio de establecer conexiones entre los contenidos, propiedades, conceptos, etc., en otras palabras, que el estudiante tenga las bases para comprender conceptos matemáticos de mayor complejidad (Carrillo et al., 2014). Este tipo de conexiones, de acuerdo con Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán (2013), deben favorecer la construcción de nuevos conocimiento. De acuerdo con Zakaryan y Sosa (2021), existen cuatro tipos de conexiones:

...de complejización (se relaciona con el contenido matemático posterior, la matemática elemental desde un punto de vista avanzado), de simplificación (la matemática avanzada se contextualiza retrospectivamente en el contenido matemático más elemental sobre el

que se basa), auxiliares (participación necesaria de un elemento matemático en procesos más amplios) y transversales (cuando diferentes elementos del contenido matemático tienen características en común [p. 76].

- *Conocimiento de la práctica matemática*, se refiere al dominio de proceder y poner en práctica el saber matemático, ejercicios, actividades, solución de problemas, etc. En este dominio

...el profesor debe saber las distintas formas de conocer y producir, así como saber definir, argumentar, razonar y proceder en matemáticas; por otro lado, el maestro también está obligado a entender cómo se entablan relaciones entre conceptos, propiedades y principios [Medina, 2018, p. 33].

En su conjunto, este conocimiento es profesional, en el cual interaccionan sus dominios, y requiere de la didáctica para su enseñanza, más que solo saberes matemáticos (Carrillo et al., 2014; Ball et al., 2008). En cambio, para Dubinsky (1996, citado en Rebolgar, 2000, p. 156) el conocimiento matemático le permite al docente “responder a situaciones matemáticas problemáticas mediante la reflexión sobre problemas y sus soluciones dentro de un contexto social y la construcción o reconstrucción de acciones, procesos y objetos organizándolos en esquemas para tratar con dicha situación”. Asimismo, de acuerdo con Hill et al. (2008) y Ball et al. (2008), este tipo de conocimiento abarca el dominio que el profesor tiene de los procedimientos matemáticos que requiere implementar ante la solución de problemas y para validarlo como correcto e incorrecto.

METODOLOGÍA

El estudio aquí descrito es de corte descriptivo (Cohen et al., 2007), centrado en el conocimiento matemático que tiene el profesor de educación secundaria en torno al concepto de pendiente, además es parte de una investigación más amplia cuyo objetivo es identificar los recursos usados para la enseñanza de este concepto matemático en tercer grado de educación secundaria en México. Para la recopilación de datos se utilizó una encuesta en línea, previo pilotaje y validación mediante triangulación, en ella se incluyeron preguntas sobre el significado de la pendiente de rectas cartesianas, tomando como referente el currículo escolar mexicano (SEP, 2017). Las preguntas planteadas en la encuesta son de naturaleza abierta con el propósito de que los participantes expresaran libremente su respuesta (Cohen et al., 2007). Al tener esta naturaleza, se buscó recabar información sobre cómo definen la pendiente de la recta, si esta definición se apega a la propuesta curricular mexicana, qué propiedades y qué relación tiene la pendiente con la recta o con otros conceptos, así como cuál es el propósito de que el estudiante la comprenda; en particular, se les plantearon cinco preguntas (Páez et al., en prensa), las cuales son:

- ¿Cómo define el concepto de pendiente?

- En relación con su respuesta a la pregunta 1, argumente si esta definición es la que usted enseña o enseñaría en secundaria. De no ser así, ¿cuál o cuáles definiciones enseñaría a sus estudiantes?
- Además de la definición o las definiciones dadas en las preguntas anteriores, ¿existe alguna otra u otras definiciones de la pendiente? De ser así, ¿cuál o cuáles son?
- ¿Qué propiedad o propiedades tiene la pendiente de una recta?

La toma de datos tuvo una duración de dos meses en el año 2020 y fue a través de la plataforma Google Forms, esto debido al distanciamiento social que pasamos en México a causa de la pandemia por la COVID-19 (OMS, 2021). Se tuvo una participación de 316 profesores que, durante la toma de datos, enseñan matemáticas en los diferentes grados de educación secundaria en el estado de Aguascalientes, México. Para la participación de estos profesores se contó con el apoyo del Institución de Educación de Aguascalientes. Los participantes laboran en escuelas secundarias de educación pública –general, técnica o telesecundaria–, además la mayoría tiene formación en docencia, y algunos de ellos cuentan con estudios de posgrado (maestría en educación general o relacionada con la enseñanza de las matemáticas). Además, como parte de su didáctica, los profesores usan su libro de texto como un recurso fundamental para enseñar matemáticas.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

El conocimiento matemático para enseñar la pendiente de rectas cartesianas identificado en los profesores que aquí participaron es de tipo básico, relacionado con los dominios *Conocimiento de los temas* y *Conocimiento de las estructuras matemáticas* (Carrillo et al., 2014). Este conocimiento se apega, en su mayoría, a los aprendizajes esperados en el currículo matemático mexicano para educación básica (SEP, 2017), principalmente está vinculado con la definición y propiedades que tiene la pendiente de la recta. En este conocimiento los profesores muestran conexiones de simplificación y auxiliares entre razón de cambio, pendiente e inclinación, donde se usa como referente la posición y dirección de la recta en el plano cartesiano.

Significados del concepto de pendiente

La mayoría de los profesores refiere que la pendiente es, principalmente, la inclinación de la recta respecto al eje horizontal –o eje de las abscisas– dentro del sistema de coordenadas cartesianas. Además de esta definición geométrica, hacen referencia a otros tres significados relacionados con áreas de la matemática: álgebra, geometría y trigonometría (véase Tabla 1).

Tabla 1

Significados que los profesores dan a la pendiente de rectas cartesianas

Área de la matemática	Significado
Geometría	Inclinación de la recta respecto al eje horizontal Razón geométrica a partir de dos puntos en la recta cartesiana
Álgebra	Razón de cambio, dados los valores de dos puntos de la recta
Trigonometría	Tangente del ángulo de inclinación

Fuente: Elaboración propia.

En relación con las definiciones en el área de la geometría, los profesores vinculan la pendiente con la inclinación de la recta y con la razón de cambio en términos de su representación geométrica en el plano cartesiano. Por un lado, ellos definen la pendiente como la inclinación de la recta tomando como referente el eje horizontal del plano cartesiano; por ejemplo, refieren lo siguiente:

...[es la] inclinación de un elemento lineal, consecutivo y natural respecto a la horizontal [significado que dio Andrea¹].

...es la inclinación de la recta con respecto al eje de la x y se representa con la variable m [definición dada por Paco].

Aunque su definición se apega a la propuesta curricular, algunos participantes no explicitan el eje horizontal, solo la plantean en términos generales al considerar que la pendiente

...es la inclinación de la recta [definición dada por María].

Por otro lado, los profesores plantean la pendiente en términos de la razón de cambio de manera geométrica, ellos consideran que al tener un par de puntos de la recta se puede conocer la inclinación de esta. La definen geoméricamente como la relación que se da entre el lado horizontal y vertical del triángulo rectángulo construido dados dos puntos cualesquiera de la recta; por ejemplo, ellos mencionan lo siguiente:

Es la inclinación de la recta que se hace al unir dos puntos [definición de Luis].

Como la inclinación de una recta, dada por la razón entre dos valores [significado dado por Andrea].

Como desnivel de un punto a otro [definición de Daniel].

En relación con el álgebra, los profesores definen la pendiente de la recta como una razón de cambio. En este sentido, la ven como una relación entre las variables dependiente e independiente, y se obtiene al tener las coordenadas x, y de dos puntos cualesquiera de la recta, cuya representación algebraica es la diferencia de y sobre la diferencia de x ; por ejemplo,

$m = (y_1 + y_2) / (x_1 - x_2)$ [definición dada por Carla].

¹ Se usan seudónimos para el anonimato de los participantes.

En esta definición, como parte de su bagaje matemático, los profesores consideran que hay una relación –cociente– entre ambas variables, y es dada como el resultado de dividir la diferencia de cada variable, tal como lo dice el profesor Luis:

Razón de cambio de los términos dependientes con respecto a los términos independientes.

En el contexto geométrico, este significado es la construcción del triángulo rectángulo dados dos puntos, de modo que visualmente se tiene la relación que se da entre los catetos.

Además, aunque en menor medida, los profesores definen la pendiente en términos trigonométricos. Ellos consideran que la pendiente de rectas cartesianas es, por ejemplo,

...la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación [respecto a la horizontal] [definición dada por Margarita].

Este significado se apega a la definición formal de la pendiente en términos trigonométricos (Courant y Robbins, 2002), pero en los planes y programas de educación secundaria no se propone su enseñanza (SEP, 2017), solo se muestra en trigonometría la relación entre los catetos y la hipotenusa sin vincularlos o hacer una reflexión de su relación con la inclinación de rectas cartesianas.

Como parte de su conocimiento matemático, los profesores consideran que las cuatro definiciones se deben enseñar en tercero de secundaria, principalmente, la mayoría de los participantes plantean que se debe enseñar la pendiente en términos de la inclinación de recta (véase Tabla 2); aunque un porcentaje menor determinan que se debe enseñar como razón de cambio –algebraica o geométrica–, así como dada en términos de la tangente aún cuando el currículo escolar plantea que solo se debe trabajar la razón de cambio.

Tabla 2

Porcentaje de profesores que consideran que se debe enseñar uno de los significados de la pendiente en tercero de secundaria

Significado	Porcentaje de profesores (%)
Inclinación de la recta	90.51
Razón geométrica (razón de cambio)	2.37
Razón algebraica (razón de cambio)	3.73
Tangente del ángulo de inclinación	3.39

Fuente: Elaboración propia.

Asimismo se identificaron otras dos definiciones relacionadas con la pendiente de la recta, las cuales son incorrectas. Por un lado, algunos profesores refieren la pendiente como el ángulo de inclinación (por ejemplo, Carlos menciona lo siguiente: “[es el] ángulo de inclinación de una recta que puede ser ascendente o descendente”; por su parte, Ana afirma que la pendiente es “es la abertura que se le da a una línea

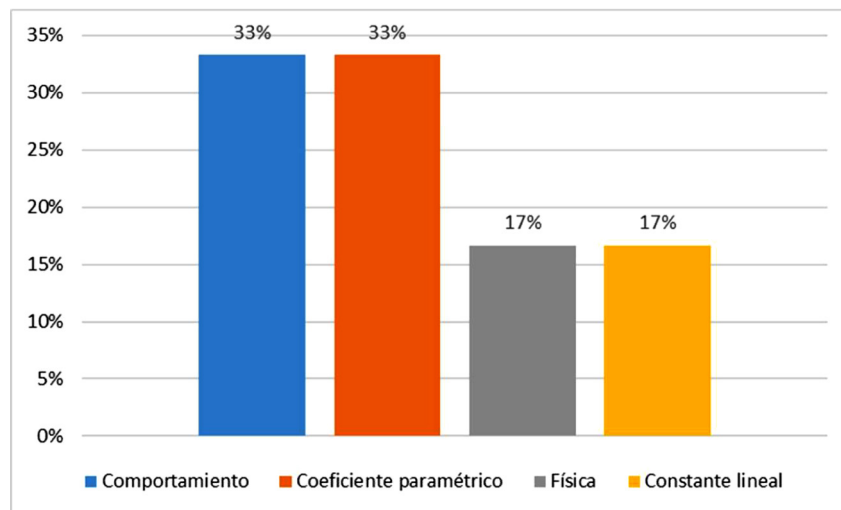
recta o curva que parte de los ejes de x y y "). Por otro, consideran que la recta por sí misma es la pendiente (por ejemplo, "es una línea recta o segmento el cual tiene una inclinación, la cual va a depender de los datos de la abscisa y las ordenadas", definición de Cristina). Aunque estos significados son presentados en menor medida, no es claro si existe una falta de conocimiento en torno a que la pendiente es la inclinación de la recta o se debe a una sintaxis por parte de los profesores.

Propiedades de la pendiente en rectas

En este bagaje matemático que los participantes poseen se identificaron cuatro propiedades que dan a la pendiente de rectas, y están relacionadas con el comportamiento/dirección de recta, constante lineal, propiedad física, y determinante (véase Figura 1).

Figura 1

Propiedades que los profesores identifican en la pendiente de rectas cartesianas



Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con la Figura 1, el comportamiento y el coeficiente paramétrico son las principales propiedades que los profesores identifican en la pendiente de la recta. En cuanto al comportamiento, los docentes hacen referencia al tipo de recta: creciente, decreciente, horizontal y vertical. Esta última es la que menos mencionan, teniendo un predominio en sus respuestas las dos primeras (rectas crecientes y decrecientes). Asimismo, el coeficiente paramétrico lo plantean en término del valor positivo o negativo de la pendiente, así como pendiente cero o indefinida. Algunos profesores vinculan estas dos propiedades, por ejemplo, al afirmar que

...la recta es decreciente cuando la pendiente es negativa, o creciente cuando es positiva [explicación proporcionada por Ana]

o que

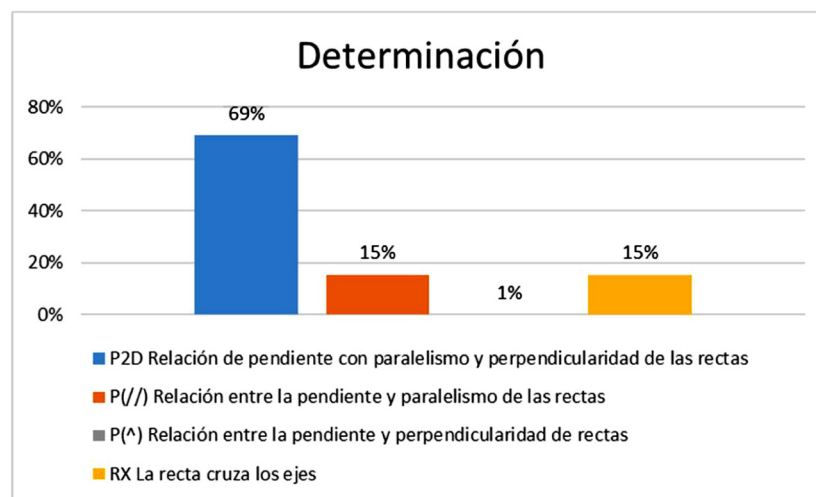
...la recta es horizontal cuando su pendiente es cero [argumento planteado por Lalo].

Al igual que la propiedad de comportamiento, en el coeficiente paramétrico, los profesores hacen referencia principalmente al valor de la pendiente, y con un menor porcentaje a la pendiente indefinida; asimismo asocian esta última a la recta vertical.

En relación con la propiedad de determinación, se identificaron tres características: paralelismo, perpendicularidad de las rectas, e intersección de la recta con alguno de los ejes del plano cartesiano (véase Figura 2). Es notorio que los profesores consideran que la pendiente permite identificar si la recta es perpendicular o paralela a otras rectas, la mayor parte de ellos hacen referencia a estos dos elementos, sin embargo, en una menor medida algunos profesores las mencionan por separado.

Figura 2

Tipos de determinismo que los profesores identifican en la pendiente de rectas cartesianas



Fuente: Elaboración propia.

Además, los profesores consideran que la pendiente indica si la recta cruza (intersecta) con alguno de los ejes del plano cartesiano, sin embargo, esta respuesta está dada en menor frecuencia (1%). Un ejemplo de ello es la respuesta de Andrea, quien plantea que

...dependiendo de su inclinación puede ser positiva o negativa, y al conocer donde cruza el eje de las ordenadas podemos conocer su función.

Por su parte, María afirma que la pendiente

...es un número constante, se puede obtener a partir de la división de y/x , puede ser negativa o positiva, siempre cruza por el eje de las ordenadas.

CONCLUSIONES

El conocimiento matemático que los profesores muestran en el estudio es producto de su formación y desarrollo profesional, y como dice Climent (2002), lo ponen en práctica con sus estudiantes; este también coincide con Páez (2015), quien expone que un profesor plantea inferencias sobre el cálculo de la pendiente y las valida como verdaderas a partir de su propia práctica. Los resultados muestran que los participantes tienen un conocimiento matemático básico en torno al concepto pendiente, el cual se apega a lo que deben aprender los estudiantes de tercer grado de educación secundaria. Este conocimiento está relacionado principalmente a lo que Carrillo, Escudero y Flores (2014) plantean como *Conocimiento de los temas* y *Conocimiento de las estructuras*, en cuando al dominio que tienen de la matemática escolar relacionada con su significado y propiedades, dando relevancia a la constante lineal y determinante, comportamiento o dirección de recta o constante lineal en la recta cartesiana, lo que coincide con los resultados de Teuscher y Reys (2010). Los profesores refieren cuatro significados, dando énfasis a la inclinación de la recta tomando como referente el eje horizontal en el plano cartesiano, y la relación con la razón de cambio, ya sea algebraica o geoméricamente, lo cual coincide con la planes y programas de estudio para educación secundaria en México (SEP, 2017). El conocimiento matemático de los profesores se apega a la propuesta curricular, cuyo objetivo es enseñar la razón de cambio en rectas cartesianas, más que la pendiente o inclinación de la recta. Asimismo busca establecer conexiones entre diversos conceptos para llegar a comprender la pendiente, estas conexiones de simplificación y transversales, en las que se usa la razón de cambio para comprender la pendiente, y se espera que esta sea la base para que más adelante se dé la conexión de complejización (Zakaryan y Sosa, 2021).

Los resultados también muestran que hay una falta de comprensión en relación a que la pendiente la definen en términos del ángulo de inclinación o la identifican como la recta por sí misma. Lo anterior muestra la necesidad de favorecer en el profesor la reflexión sobre la relación que existe entre la pendiente con otros conceptos matemáticos y propiedades de la recta para evitar sesgos y construir nuevo conocimiento matemático, lo cual coincide con lo mencionado por Stump (1999), quien afirma que “los profesores de matemáticas en servicio [...] necesitan oportunidades para examinar el concepto de pendiente, reflexionar sobre su definición, construir relaciones entre sus diversas representaciones” (p. 142).

AGRADECIMIENTO

Esta investigación recibió financiamiento por parte del CONACYT-SEP a través de la Convocatoria de Investigación Científica Básica 2017-2018, así como de la Universidad Autónoma de Aguascalientes, No. de registro A1-S-44743 y PIE19-11, respectivamente. Agradecemos también la participación de los profesores en el estudio, así como el apoyo otorgado por la maestra María de Lourdes Carmona Aguiñaga (directora de Educación Básica del Instituto de Educación de Aguascalientes), y a las licenciadas Claudia Magaly Ruiz Luna, Lucía Magdalena Rodríguez Ponce y Martha Cinthia García Gaytán.

REFERENCIAS

- Ávila, A. (2016). La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo. *Educación Matemática*, 28(3), 31-59.
- Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 399-406.
- Carrillo, J. (2010). Building mathematical knowledge in teaching by means of theorised tools. En K. Ruthven y T. Rowland (eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 273-287). Springer.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, C., y Muñoz-Catalán, M. (2013). Determining specialized knowledge for Mathematics teaching. En B. Ubuz (ed.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for research in Mathematics education* (pp. 2985-2994). CERME.
- Carrillo, J., Escudero, D., y Flores, E. (2014). El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria. *Revista de Análisis Matemático-Didáctico para Profesores*, (1), 16-26.
- Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso* [Tesis de Doctorado]. Universidad de Huelva, España.
- Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. Routledge.
- Courant, R., y Robbins, H. (2014). *¿Qué son las matemáticas?* Fondo de Cultura Económica.
- Delgado-Rebolledo, R., y Espinoza-Vásquez, G. (2019). El conocimiento del profesor de matemáticas sobre la demostración y sus roles en la enseñanza de las matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (eds.), *Investigación en educación matemática XXIII* (pp. 253-262). SEIEM.
- Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*, 10(1), 53-77. <http://hdl.handle.net/10481/37190>
- Fennema, E., y Franke, L. M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on Mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). MacMillan.
- Flores, C. D., y Mosquera, G. A. (2022). Conceptualizaciones de la pendiente en el currículo colombiano de matemáticas. *Educación Matemática*, 34(2), 217-244. <https://doi.org/10.24844/EM3402.08>
- Hill, H., y Ball, D. (2009). The curious—and crucial—case of mathematical knowledge for teaching. *Phi Delta Kappan*, 91(2), 68-71.
- Hill, H., Ball, D., y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Hill, H., Rowan, B., y Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(2), 87-211.
- Medina, I. V. (2018). *Conocimiento didáctico del profesor de educación primaria al impartir la multiplicación de fracciones* [Tesis de Maestría]. Universidad Autónoma de Aguascalientes, México.
- Mochón, S., y Morales, M. (2010). En qué consiste el “conocimiento matemático para la enseñanza” de un profesor y cómo fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria. *Educación Matemática*, 22(1), 87-113.
- Montes M., Aguilar A., Carrillo J., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). MTSK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3185 - 3194). Middle East Technical University/ERME.

- Nagle, C., Casey, S., y Moore-Russo, D. (2017). Slope and line of best fit: A transfer of knowledge case study. *School Science and Mathematics*, 117(1-2), 13-26. <https://doi.org/10.1111/ssm.12203>
- NCTM [National Council of Teachers of Mathematics] (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.
- OMS [Organización Mundial de la Salud] (2021, sep. 24). *Los nombres de la enfermedad por coronavirus (COVID-19) y del virus que la causa*. [https://www.who.int/es/emergencias/diseases/novel-coronavirus-2019/technical-guidance/naming-the-coronavirus-disease-\(covid-2019\)-and-the-virus-that-causes-it](https://www.who.int/es/emergencias/diseases/novel-coronavirus-2019/technical-guidance/naming-the-coronavirus-disease-(covid-2019)-and-the-virus-that-causes-it)
- Páez, D. A. (2015). *Análisis de la práctica del profesor de matemáticas en torno al concepto de pendiente: énfasis en la reflexión durante y después de la acción* [Tesis de Doctorado]. CINVESTAV-IPN.
- Páez, D. A., Eudave, D., Orta, J. A., y Macías, A. C. (en prensa). Significados sobre la pendiente de rectas cartesianas. Un estudio con profesores de educación secundaria. En *Actas del IX Congreso Ibero-Americano de Educação Matemática - IX CIBEM, Brasil, del 5 al 9 de diciembre de 2022*.
- Planas, N. (2009). Matemáticas en la educación superior. En N. Planas y A. Alsina (coords.), *Educación matemática y buenas prácticas. Infantil, primaria, secundaria y educación superior* (pp. 205-212). Graó.
- Rebollar, A. (2000). *Una variante para la estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, a partir de una nueva forma de organizar el contenido, en la escuela Media cubana* [Tesis de Doctorado]. Instituto Superior Pedagógico Frank País García, Cuba.
- Rico, L., Gómez, P., y Cañadas, M. (2014). Formación inicial en educación matemática de los maestros de primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación*, (363), 35-59.
- SEP [Secretaría de Educación Pública] (2017). *Plan y programas de estudio para la educación básica. Aprendizajes clave para la educación integral*. SEP.
- Sfard, A. (2005). What could be more practical than good research? On mutual relations between research and practice of Mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 393-413.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23.
- Socas, M. M. (2011). Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en educación primaria. Buenas prácticas. *Educatio Siglo XXI*, 29(2), 199-224.
- Sosa, L. (2011). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en educación primaria. Buenas prácticas* [Tesis de Doctorado]. Universidad de Huelva, España.
- Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, 11(2), 124-144. <https://doi.org/10.1007/bf03217065>
- Stump, S. L. (2001). High school precalculus students' understanding of slope as measure. *School Science and Mathematics*, 101(2), 81-89.
- Teuscher, D., y Reys, R. E. (2010). Slope, rate of change, and steepness: Do students understand these concepts? *Mathematics Teacher*, 103(7), 519-524.
- Zakaryan, D., y Sosa, L. (2021). Conocimiento del profesor de secundaria de la práctica matemática en clases de geometría. *Educación Matemática*, 33(1), <https://doi.org/10.24844/EM3301.03>

Cómo citar este artículo:

Páez, D. A., y Eudave Muñoz, D. (2022). Conocimiento matemático para enseñar la pendiente de rectas cartesianas. Un estudio con profesores de secundaria. *RECIE. Revista Electrónica Científica de Investigación Educativa*, 6, e1732. <https://doi.org/10.33010/recie.v6i0.1732>



Todos los contenidos de RECIE. *Revista Electrónica Científica de Investigación Educativa* se publican bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional, y pueden ser usados gratuitamente para fines no comerciales, dando los créditos a los autores y a la revista, como lo establece la licencia.
