

¿Qué significados de la derivada favorece un profesor en su planeación de clase?

What meanings of the derivative does a teacher favor in his lesson planning?

Eduardo Carlos Briceño Solís • Judith Alejandra Hernández Sánchez
Jonathan Adrián Morales de la Cruz

RESUMEN

El presente artículo reporta un análisis de contenido de las planeaciones didácticas de cuatro profesores sobre la enseñanza de la derivada. El objetivo es indagar cómo estos profesores articulan y organizan los significados de este contenido en sus planeaciones de clase. Se considera como problemática que la enseñanza de la derivada en el nivel medio superior –NMS– presenta significados escolares de manera desarticulada y aislada donde predomina lo algorítmico y simbólico. Como resultado existe una discrepancia entre los significados del programa de estudios y lo que proponen las planeaciones de los profesores.

Palabras clave: Análisis, currículo, planeaciones, derivada.

ABSTRACT

The following article reports a content analysis of four teachers' didactic plans on the teaching of the derivative with the objective of investigating how their meanings are articulated and organized for a class. It is considered as problematic that the teaching of the derivative in the upper Secondary level presents school meanings in a disjointed and isolated way, where the algorithmic and symbolic predominate. As a result, there is a discrepancy between the meanings of the study program and what the teacher's planning proposes.

Keywords: Analysis, curriculum, planning, derivative.

INTRODUCCIÓN

La planeación en los diferentes niveles educativos es de suma importancia, ya que influye de manera directa en el contenido que se imparte, impacta en el funcionamiento de la clase y el significado que se favorece. Autores como Lupiáñez y Rico (2008) consideran que las planeaciones son una herramienta para establecer, analizar y organizar las capacidades y competencias que los futuros profesores esperan desarrollar de un contenido matemático; es decir, en ellas se reflejan formas de organizar un contenido matemático para una clase y entender el proceso de aprendizaje que el profesor considera. En este sentido, brinda una oportunidad para caracterizar el conocimiento que el profesor pone en juego (Paternina-Borja y Juárez-Ruíz, 2023), los significados que se favorecen en su propuesta de unidad didáctica (Gómez, 2009) y la naturaleza de los significados asumidos y su trayectoria de enseñanza (Barboza y Castro, 2023).

Aunado a lo anterior, Artigue (1995) menciona que los estudiantes tienen problemas en reconocer algunos significados de la derivada, dado que el más reconocido es su fórmula algebraica. Esto promueve que el estudiante aprenda, en mayor frecuencia, el significado algorítmico de la derivada y no la variedad que esta tiene en otros contextos, como por ejemplo en el movimiento de un objeto (Cordero et al., 2010). La existencia de distintos significados asociados a la derivada, como el límite del cociente incremental, la razón de cambio, la pendiente de la recta tangente o la variación de un fenómeno (mencionados en Hernández et al., 2023, y Castro et al., 2015), en escenarios educativos es inevitable. Esto lo convierte en un tema de investigación para distintos autores, como Dolores (2000), Zandieh (2000), Sánchez et al.

Eduardo Carlos Briceño Solís. Profesor-Investigador de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, México. Es Licenciado en Enseñanza de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Yucatán. Obtuvo el grado de Maestro y Doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Perteneció al Sistema Nacional de Investigadoras e Investigadores, Nivel I. Sus líneas de investigación son los usos del conocimiento matemático, análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con uso de tecnología, proceso de desarrollo profesional docente y pensamiento variacional. Correo electrónico: ebriceno@uaz.edu.mx. ID: <https://orcid.org/0000-0002-2009-3879>.

Judith Alejandra Hernández Sánchez. Profesora-Investigadora de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, México. Es Doctora en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero. Tiene los reconocimientos al perfil PRODEP y del Sistema Nacional de Investigadoras e Investigadores. Entre sus publicaciones recientes se encuentra el libro *Investigaciones y experiencias en enseñanza de las ciencias y la matemática* (coord., 2023). Es miembro de la Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa, de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática y del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Correo electrónico: judith700@hotmail.com. ID: <https://orcid.org/0000-0003-0569-2037>.

Jonathan Adrián Morales de la Cruz. Investigador independiente, Zacatecas, México. Se desempeñó como profesor de bachillerato en el estado de Zacatecas del 2015 al 2020 y actualmente es investigador y maestro independiente. Correo electrónico: jonhy_38@hotmail.com. ID: <https://orcid.org/0009-0002-2186-7095>.

(2008), Reséndiz (2010), Caballero (2012) y Briceño et al. (2018). Estos trabajos ilustran diferentes significados que tiene la derivada en el ámbito educativo, aunque cada uno describe miradas específicas sobre cómo esta representa múltiples significados, lo cual la dota de cierta complejidad en su comprensión y enseñanza para el estudiante.

Desde esta investigación se plantea indagar los múltiples significados de la derivada que se evidencian en las planeaciones de clase de cuatro profesores de Matemáticas del nivel medio superior –NMS– en México. La planificación es descrita en Rico (2012) mediante dos niveles: global y local. El primero incluye como referente principal al programa de estudio propuesto por las instituciones educativas, para evidenciar lo que de manera oficial se solicita al profesor de Matemáticas enseñar sobre el tema de la derivada. El segundo corresponde a la planeación de clase del profesor, que sirve como instrumento organizador de su práctica en el aula. Por lo tanto, una comparación de los significados en ambos niveles de la planificación permite generar una reflexión sobre la problemática de esta multiplicidad y el estatus que gobierna en la enseñanza de la derivada en el NMS.

Para el análisis del significado se toman las tres componentes propuestas en Rico (2012): la estructura conceptual del concepto de derivada (dividido en su campo conceptual y procedimental); las representaciones semióticas más utilizadas, y los contextos fenomenológicos. Este último determina cuáles contextos usa el docente sobre cómo enseña dicho concepto, qué fenómenos vincula a él y cuáles son las expectativas que propone (Mora y Ortiz, 2013). En la parte de la estructura conceptual del contenido matemático se toman en cuenta las tareas o actividades que propone el docente para alcanzar cierto(s) objetivo(s) para su enseñanza. Lo anterior representa una forma de análisis de la planificación de un contenido por parte de el o la docente, siendo esta práctica parte de su competencia continua de desarrollo (León et al., 2013).

Con tal antecedente, esta investigación considera importante evidenciar los significados de la derivada que emergen en la práctica del profesor desde sus planeaciones y cómo estos se relacionan con el plan de estudios. Para ello se toman las planeaciones sobre el tema de la derivada de cuatro profesores del NMS y el respectivo programa de estudios nacional propuesto por la Dirección General de Bachilleratos (DGB, 2013). Así, el contenido del artículo se organiza en los siguientes cinco apartados:

- En el primero se interpretan desde una perspectiva teórica algunos significados de la derivada identificados en la literatura, además de mostrar el rol de estos en el aprendizaje y sus implicaciones en su enseñanza.
- En el segundo se presenta el aporte de este trabajo hacia la problemática y su tratamiento por medio del marco teórico conformado por las tres componentes del significado propuestas en Rico (2012).
- En la tercera sección se describe el análisis de contenido como el método utilizado para la identificación, descripción y organización de los significados de un contenido matemático escolar.

- En la cuarta sección se presentan los resultados de este análisis desde las planeaciones de cuatro docentes de Matemáticas sobre los significados de la derivada que potencian.
- Finalmente, en la sección de discusión presentamos un análisis comparativo entre los significados de la derivada en las planeaciones de los profesores y el programa de estudios.

Significados de la derivada y el impacto en su enseñanza y aprendizaje

Cuando se menciona significado de un concepto este se relaciona con su comprensión. Al respecto, Sierpínska (1990) señala que “comprender el concepto será concebido como el acto de captar su significado; este se compone de un acto de generalización y síntesis relacionado a elementos particulares de la estructura del concepto. Así estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión” (p. 35). Otros autores reconocen la generalización al dar sentido al objeto matemático de una manera amplia con un margen de posibilidades que brinda su significado, y la síntesis conlleva a la habilidad de organizar las distintas relaciones que puede tener el objeto y sus significados por medio de sus propiedades de una forma adecuada (Rodríguez et al., 2021). En nuestro caso acogimos la concepción de significado propuesta por Frege y adaptada por Rico (2012), conformada por tres componentes (referencia, representación, fenomenología) y las relaciones (conceptuales o procedimentales) que los entrelazan, las cuales se describen en la siguiente sección. Los significados de la derivada que sirvieron de referente desde la literatura se presentan a continuación y se reinterpretan desde las tres componentes del significado propuestas en Rico (2012).

Zandieh (2000) identifica cuatro significados para la derivada, vistos como: razón de cambio, pendiente, límite y velocidad (Tabla 1). De manera complementaria, la fuente reporta que los estudiantes no logran articular los significados propuestos, ya que la consideran más como pasos algebraicos a seguir. Esta forma de comprender a la derivada dificulta su coordinación con sus otros significados. Por lo tanto, reconocer la existencia de múltiples significados para la derivada, su organización y articulación entre ellos, se presenta como algo necesario para su comprensión. Galindo y Breda (2023) reportan de su revisión que en libros de textos en distintas carreras se brindan varios significados, pero con mayor interés en el significado parcial de derivada como límite, como incrementos donde procedimentalmente hay mayor énfasis en lo algorítmico dejando de lado otros significados que se puedan relacionar, como el teorema del valor medio, por ejemplo.

Tabla 1

Significados parciales de la derivada identificados en Zandieh (2000)

Referente (derivada como:)	Representación	Fenomenología (¿en qué contextos?)
Pendiente de la recta tangente a una curva en un punto	Gráfica	En un contexto matemático
Tasa instantánea de cambio	Verbal	Sin un contexto evidente
Velocidad o rapidez	Simbólico	En un contexto físico
Límite del cociente incremental	Simbólico	En un contexto matemático

Fuente: Elaboración propia.

Reséndiz (2010) documentó formas en que un profesor comunica y negocia en sus clases el significado de la derivada como variación. Es importante mencionar que, a diferencia de otras investigaciones, la autora le dio principal interés a la segunda componente del significado, que son las representaciones semióticas, las cuales fueron: numérico (tabular), algebraico, geométrico, de comparación y lenguaje natural (Tabla 2). El trabajo hizo ver, en el discurso del profesor, la diversidad de significados del concepto de derivada a través de la noción de variación presentes en la clase, aunque el documento no se centró en cómo se articulan estos.

Tabla 2

Significados parciales de la derivada como variación identificados en Reséndiz (2010)

Referente (derivada como variación:)	Representación	Fenomenología (¿en qué contextos?)
Numérica	Numérico-tabular	
Con un punto de referencia	Gráfico	
	Verbal	Situaciones cotidianas
Empleando parámetros como variables principales	Algebraico	
Covariación/comparación a/b	Algebraico	

Fuente: Elaboración propia.

En este mismo tenor, Desfitri (2016) presenta un estudio cuya finalidad consiste en analizar la comprensión del concepto de límite y derivada en 20 profesores y cómo se los enseñan a sus alumnos. Un posicionamiento interesante de la autora se presenta en la Tabla 3, donde muestra respuestas respecto a la enseñanza de la derivada y los límites, así como los enfoques que consideran para ambas.

Tabla 3*Algunos enfoques utilizados por los profesores al introducir el concepto de límite y derivada*

Introduciendo límite	Introduciendo derivada
Por definición de límite	Empieza de nuevo con puntos límite
Por definición de límite y algunos ejemplos	Introduce la tasa de cambio
Pregunta a los estudiantes que midan un objeto hasta que tenga un tamaño más pequeño	Usa la gráfica
Proporciona a los alumnos un número que luego se aproxima de izquierda a derecha	Explicar la definición de derivada
Al usar oraciones con una palabra “casi, cerca, cerca de”	Dar ejemplos de la vida cotidiana
Usando la recta numérica	Motivar a los estudiantes con el objetivo y la ventaja de aprender derivadas

Fuente: Desfitri, 2016, pp. 6-7 (traducción propia).

La investigación considera que estos enfoques se basan en gran parte en libros de texto, centrados en enseñar la definición de la derivada por medio del concepto de límite. De esta manera, se rescata que el referente conceptual que utilizan estos profesores al enseñar la derivada es el límite del cociente incremental. Otra componente del significado identificado en la investigación de Desfitri (2016) es la fenomenología, para ello consideramos la Tabla 4 que presenta las frecuencias de respuestas de los profesores respecto al tópico donde la derivada se dota de sentido a través de su uso y aplicación al enseñarla.

Tabla 4*Aplicación de la derivada que generalmente enseñan a los estudiantes*

Tópico	Frecuencia
Distancia, velocidad, aceleración	20
Altura máxima de la bola arrojada	3
Cálculo del punto marginal	3
Cálculo de la tasa de crecimiento	7
Especificar gradiente y línea tangente	4
Plazo y tiempo límite para que los estudiantes terminen la tarea	1
Volumen de esfera	1

Fuente: Desfitri, 2016, p. 8 (traducción propia).

Tomando los resultados de Desfitri (2016) expuestos en la Tabla 4, podemos ver que la fenomenología (donde toma sentido el concepto) que predomina en el discurso de los profesores al enseñar la derivada es en situaciones que tienen que ver con la velocidad y sus conceptos asociados (distancia y aceleración). Aunque la autora menciona que el 50% de los profesores presenta problemas en contextos no

matemáticos para sus clases, admiten que en ellas se repiten las mismas explicaciones y dificultades al momento de llevar a cabo la aplicación de la derivada. Esto deja ver la falta de más explicaciones que relacionen los significados de la derivada, dificultando dotar de sentido y utilidad a este contenido matemático escolar.

Podemos resumir que los trabajos anteriores hacen referencia a la influencia procedimental que tiene la derivada, constituyéndose como un significado accesible y comprensible que no presenta mayores problemas; sin embargo, aísla otros significados del concepto donde adquiere sentido y funcionalidad, como el caso de la variación (Castro et al., 2015; Hernández et al., 2023). También en el NMS la enseñanza de la derivada es de manera aislada y desarticulada, lo que complica su aprendizaje y enseñanza donde carece de sentido y significado (Sánchez et al., 2008). Una posible causa es producto de prácticas de enseñanza, planes de estudio o de la influencia de libros de texto (Artigue, 1995; Sánchez et al., 2008; Dolores, 2000; Desfitri, 2016; Galindo y Breda, 2023). Lo anterior muestra, fundamentalmente, que los significados que adquieren los estudiantes se obtienen por la forma en como se les brinda el contenido matemático en clases, es decir, qué significados se ponen en juego en clase, y por otro lado si estos significados se articulan entre sí. Entonces, en el ambiente escolar se reconoce la multiplicidad de significados que el estudiante conoce y por lo tanto establece una difícil tarea de articularlos.

Aunado a esto, los profesores en su mayoría basan sus planeaciones didácticas en libros de texto, en el programa de estudios y en su experiencia, donde evidencian conexiones entre significados a veces de forma desorganizada (Cuevas y Pluvillage, 2013). Dados estos antecedentes es relevante reconocer cómo los profesores organizan esta multiplicidad de significados de la derivada desde una mirada exploratoria e indagatoria en sus planeaciones. No obstante, este artículo no intenta mostrar una organización pertinente, sería un objetivo no alcanzable en este trabajo, pero sí transparentar los significados de la derivada que se favorecen. Por lo tanto, se caracterizan y organizan los significados que son evidenciados en la planeación de cuatro profesores de matemáticas del NMS en torno al tema de la derivada.

El análisis de contenido como referente teórico

El *análisis de contenido* –AC– como componente del análisis didáctico es una herramienta teórica que interpreta cómo está organizado un contenido matemático al analizar textos escolares (Gómez, 2009). Se debe considerar que su finalidad es descubrir la estructura matemática que se comunica en el contenido, de forma semántica y gráfica, entre otras. Esto permite inferir sobre los significados que se favorecen en un texto o documento como planes de estudio, libros de texto y planeaciones didácticas, por mencionar algunos. En la última década el AC es empleado en la matemática educativa para ilustrar la diversidad de significados de un contenido matemático escolar

que aparecen en un texto (Rico, 2013; Hernández et al., 2020). Esta diversidad es organizada por las relaciones entre conceptos y procedimientos, las representaciones que conforman su estructura conceptual y los contextos matemáticos o extramatemáticos donde son aplicados (Rico et al., 2008). A continuación se describen las tres componentes propuestas por Rico (2012) para caracterizar el significado de un contenido matemático escolar: estructura conceptual, representaciones semióticas y fenomenología.

Estructura conceptual

La estructura conceptual es la herramienta que describe los conceptos y procedimientos de un contenido matemático, además incluye la relación entre ellos, tomando en cuenta los sistemas de representación y fenómenos asociados (Gómez y Carulla, 2001). Este se sitúa en dos campos propios de su estructura: el campo conceptual y el procedimental. El primero incluye, en orden creciente de niveles: hechos, conceptos y estructuras conceptuales del contenido. El segundo, los procedimientos de dicho contenido, se componen también en tres niveles graduales: destrezas, razonamientos y estrategias.

Los *hechos* hacen referencia a lo sustancial del contenido: qué es lo que lo compone, qué información se brinda de él. Este se sub-distribuye en *términos*, *notaciones*, *convenios* y *resultados*, que se describen a continuación:

- El *término*. Se entiende a cómo te refieres al concepto, donde se tiene el siguiente listado: ángulo, grado sexagesimal, triángulo rectángulo, cateto, hipotenusa, etc.
- *Notaciones*. Se refiere al signo que se dota al concepto.
- *Convenios*. Son los acuerdos o consensos del contenido descrito en el texto, por ejemplo, la región del plano comprendido entre dos rectas que se cortan en un punto.
- *Resultado*. Este se ubica cuando se da información con juicio de valor en el texto, por ejemplo: los ángulos de un triángulo suman 180° (Cañadas y Gómez, 2014, p. 5).

Respecto al *concepto*, este involucra un sentido aún más múltiple, ya que requiere de otros conceptos; por ejemplo, *derivada* es un término sustancial, pero *derivadas sucesivas* es otro que no solo involucra la definición de derivada.

Respecto al campo procedimental describimos, citando lo dicho en Cañadas y Gómez (2014):

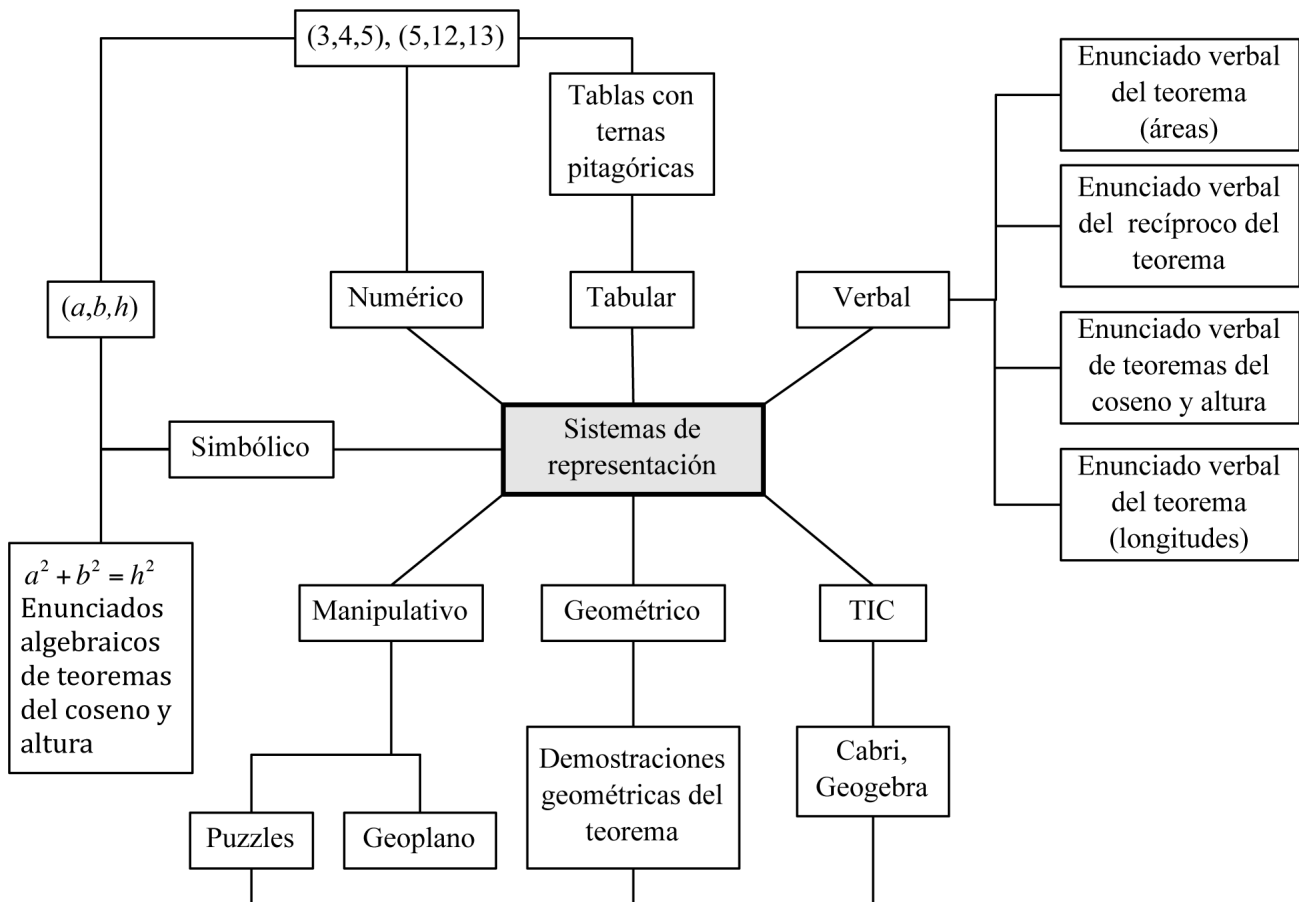
1. *Destrezas*: se ejecutan procesando *hechos* donde se manipulan símbolos y transformaciones entre ello. Por ejemplo, reconocer y construir triángulos rectángulos (con instrumentos de dibujo y TIC –tecnologías de la información y de la comunicación–).

2. *Razonamientos*: se ejecutan sobre *conceptos*, es decir, acciones como demostrar, comprobar y argumentar. Estas actúan directamente con los conceptos.
3. *Estrategias*: se ejecutan sobre *estructuras conceptuales*. Se manipulan diferentes sistemas de representación. Por ejemplo, calcular longitudes, áreas y volúmenes usando el teorema de Pitágoras [p. 5].

Los sistemas de representación

Estos permiten ver cómo operan los conceptos en sus distintas representaciones, definidos por el conjunto de signos, gráficos, expresiones algebraicas y numéricas, geométrica, pictórica, verbal o ejecutable (Rico 2012). Por ejemplo, en la Figura 1 se presentan algunos de los sistemas de representación –expuestos en forma de mapa conceptual– más usados por los profesores respecto al teorema de Pitágoras, según la investigación de Cañadas y Gómez (2014), con la intención de ejemplificar una forma similar de análisis en planeaciones docentes respecto al concepto de *derivada*.

Figura 1
 Sistemas de representación del Teorema de Pitágoras



Fuente: Cañadas y Gómez, 2014, p. 31.

Así, para identificar los sistemas de representación utilizadas en las planeaciones de los profesores y en el programa de estudios del NMS al tema de la derivada, se plantean preguntas como: “¿Qué representaciones proponen las planeaciones y programa de estudios asociadas al tema de derivada?”.

Análisis fenomenológico del contenido

El análisis fenomenológico se vincula con un planteamiento funcional de las matemáticas escolares que afirma que las ideas y conceptos son el núcleo de nuestro pensamiento, las herramientas con las que pensamos (Rico et al., 2008). Este permite reconocer que la estructura conceptual tiene una organización con los fenómenos que le dan sentido, teniendo en cuenta los significados implicados desde una visión funcional del currículo (Rico, 2012; Cañadas y Gómez, 2014).

Los fenómenos o conjunto de ellos permiten tener una conexión del concepto con la realidad; por ejemplo, si consideramos la derivada como objeto matemático, este se organiza en fenómenos de movimiento, por lo que manifiesta el uso o aplicación en lo relacionado con el movimiento físico y se caracterizará en el “modo de uso” del concepto (Chaverri-Hernández et al., 2020). Otro ejemplo que dota de sentido a un concepto son los fenómenos relacionados con la función cuadrática, como la antena parabólica, el conjunto de todas las antenas parabólicas y de reflectores parabólicos. Así, los fenómenos son manifestaciones de estos “modos de uso” que permiten explicar cómo estos aparecen bajo una estructura conceptual, permitiendo dar sentido al concepto en cuestión. Estos a su vez actúan en *contextos*, que pueden ser matemáticos o extramatemáticos, lo que permite indagar “para qué se utilizan las nociones” y en qué medios se sitúan las tareas que corresponden a las *situaciones* de corte científico, técnico, cultural, natural o personal (Chaverri-Hernández et al., 2020, p. 95).

De esta manera, el análisis fenomenológico –AF– pone el acento en los significados de los conceptos cuando contribuyen a la comprensión de ciertos fenómenos (Rico et al., 2008). Eso al considerar fenómenos, situaciones y sus relaciones entre ellas para identificar características estructurales del concepto (Gómez, 2009). En síntesis, el AF permite entender esos fenómenos que comparten cierta característica estructural con ciertas subestructuras, bajo ciertos contextos, para identificar diferencias y semejanzas de cómo están organizados.

A manera de reflexión, estos referentes teóricos (la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología) permiten identificar en torno a un contenido matemático escolar qué otros conceptos o nociones lo conforman o de qué otros forma parte; los procedimientos, razonamientos o estrategias asociados y las representaciones que permiten comunicar estas ideas, y cómo se relaciona con ciertos contextos fenomenológicos y sus distintos modos de uso. También permite

analizar la capacidad para conectar diversas estructuras y procedimientos que pueden interpretarse, abordarse y resolverse, mostrando la riqueza de sus conexiones para un contenido (Gómez, 2009). Todas estas aseveraciones permiten describir los significados potenciados del profesor sobre el concepto de derivada. Estas ideas esclarecen la forma en que se organiza el contenido de derivada según lo que el profesor planea poner en juego para su clase.

METODOLOGÍA

Se describe el proceso metodológico de la investigación al elegir cuatro profesores considerando su experiencia temporal al impartir clases de cálculo en subsistemas del nivel medio superior de México y a quienes institucionalmente se les solicita como parte de su labor desarrollar y entregar planeaciones de clase. La investigación es de corte cualitativo, dado que “se enfoca en comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto” (Hernández et al., 2014, p. 358), y descriptivo, dado que se quiere, bajo el método del análisis de contenido, evidenciar los significados que se favorecen en planeaciones docentes (currículo impartido) y en el currículo oficial (DGB, 2013), con el fin de dar una interpretación, al hacer un comparativo, de los significados potenciados de la derivada en ambos currículos. La importancia de este análisis permite tener indicadores sobre los significados de la derivada que potencialmente aprende el estudiante, dado que son los que el profesor favorece en sus planeaciones de clase. Por lo tanto, el objetivo es caracterizar dichos significados de la derivada, como un caso específico en las planeaciones de clase de cuatro docentes, con el fin de informar con base en el análisis una reflexión de su estatus de enseñanza en el nivel medio superior.

El método para realizar un análisis de contenido sigue determinadas etapas, tomadas de Rico y Fernández-Cano (2013, p. 10), las cuales son:

- Delimitar el corpus que consiste en determinar el conjunto de textos que serán sujetos del estudio, como es el programa nacional del NMS y las planeaciones de cuatro docentes.
- Concretar la unidad de análisis: se asume como unidad el *significado de la derivada*.
- Localizar o inferir en el texto las unidades de análisis, es decir, subrayar aquellos elementos que se relacionan con la unidad de análisis; por ejemplo, en qué parte aparece contenido relacionado con el concepto, cómo se propone usarse, bajo qué contextos se lleva a cabo, etc.
- Dada la unidad de análisis, en ambos currículos (oficial e impartido) se consideran los tres componentes del significado del análisis de contenido: estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología, organizándolos en un instrumento de registro de información que puede ser una tabla.

- Del registro de información de los componentes del significado, desarrollar mapas conceptuales del mismo con el fin de proporcionar una visualización de las conexiones entre dichos componentes.
- Reflexión del comparativo de ambos análisis y mapas conceptuales sobre los significados que se favorecen respecto a lo relacionado a la derivada.

En ese sentido, el AC indaga la manera en que se presenta un contenido desde la mirada de lo que el profesor favorece como significados a un estudiante en documentos institucionales. Retomemos que el interés del análisis de contenido involucra procedimientos que evidencian la forma en que los documentos brindan significados de ciertos contenidos, en el sentido de Cohen et al. (2011), que subrayan:

...el análisis de contenido define un conjunto de procedimientos estrictos y sistemáticos para el análisis y verificación de los contenidos de datos escritos [...] El análisis de contenido se puede llevar a cabo con cualquier tipo de material escrito, desde documentos impresos a transcripciones de entrevistas, desde productos de la media hasta producciones escritas [p. 563].

Las categorías establecidas por el análisis de contenido y que conforman el significado de un contenido matemático se ubicaron en la primera y segunda columnas de la Figura 2, estableciendo una señalética para identificar cada componente en las unidades de análisis conformando un instrumento para la organización de los significados de la derivada desde el programa de estudios (currículo oficial) y las planeaciones de los profesores (currículo impartido).

Figura 2

Señalética de análisis para el registro de significados

Profesor #	
Dimensiones del significado	Señalética usada en la Unidad de Registro
Estructura	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 2px solid red; padding: 2px;">Concepto</div> <div style="text-decoration: underline wavy; padding: 2px;">Definición</div> <div style="border: 2px solid black; padding: 2px;">Procedimiento</div> </div>
Representaciones	Gráfico, Geométrico, Simbólico, Tablas, Ejecutable
Fenomenología	Fenómenos, Contextos Situaciones

Fuente: Elaboración propia.

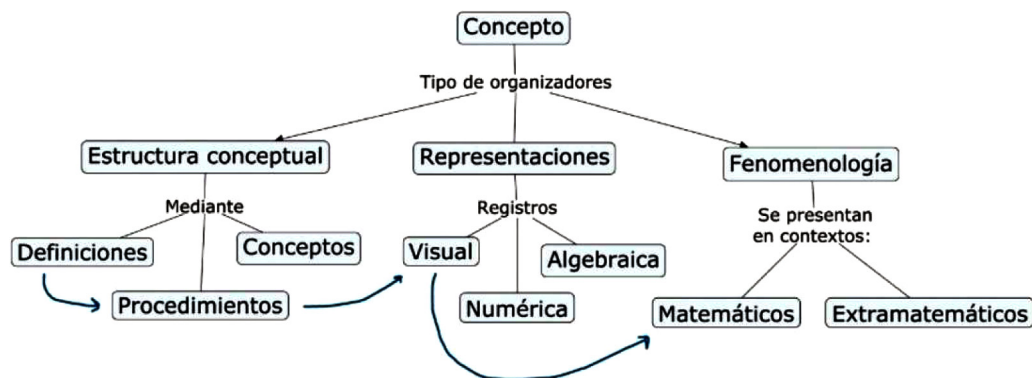
Los señalamientos marcados en color y resaltados en la Figura 2 permiten ubicar en el análisis del programa y las planeaciones en los diferentes componentes del significado. Cabe resaltar que la señalética para la estructura pretende identificar los conceptos y procedimientos asociados a la definición de derivada, mientras que el

texto marcado en color azul rescata las diversas representaciones que proponen para dicha estructura; finalmente, el contexto en que estos están ubicados (fenomenología), donde se dota de sentido, se marcan en amarillo, como se muestra en la tercera fila de la Figura 2. Esto permite identificar los significados de la derivada, además de sus relaciones entre cada uno de los organizadores del currículo. Para el registro de los significados se manejan los siguientes códigos: RSPE-número (registro de significados del programa de estudios) y RSPD-número (registro de significados de planeación docente).

Para poder visualizar estas relaciones se recurre a la elaboración de un mapa conceptual con el fin de observar qué conexiones hace el profesor en su estructura, representaciones semióticas y fenomenología respecto a la derivada. Esto ilustra la información con dos ventajas: primero, permiten descripciones no lineales de la estructura matemática resaltando la información, lo cual es de utilidad a la hora de analizar un contenido matemático, ya que permite una visión general del tema que se está analizando; segundo, lo importante no es enumerar los conceptos sino la relación entre estos (Gómez, 2009). En la Figura 3 se muestra de forma modesta una conexión de la definición de un concepto (marcado en azul) con ciertos procedimientos declarados y representados de forma visual en contextos matemáticos. Dicha conexión nos permite tener un criterio del significado potenciado de dicho concepto.

Figura 3

Ejemplo de conexión del significado de la derivada por medio del análisis de contenido



Fuente: Elaboración propia.

Consideramos que esta propuesta brinda elementos que permiten caracterizar los significados que el docente desarrolla desde su planeación y cómo estos se relacionan con su currículo oficial. Desde un punto de vista de su logro, la información que se obtenga permite una reflexión hacia la discusión curricular del concepto de derivada.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

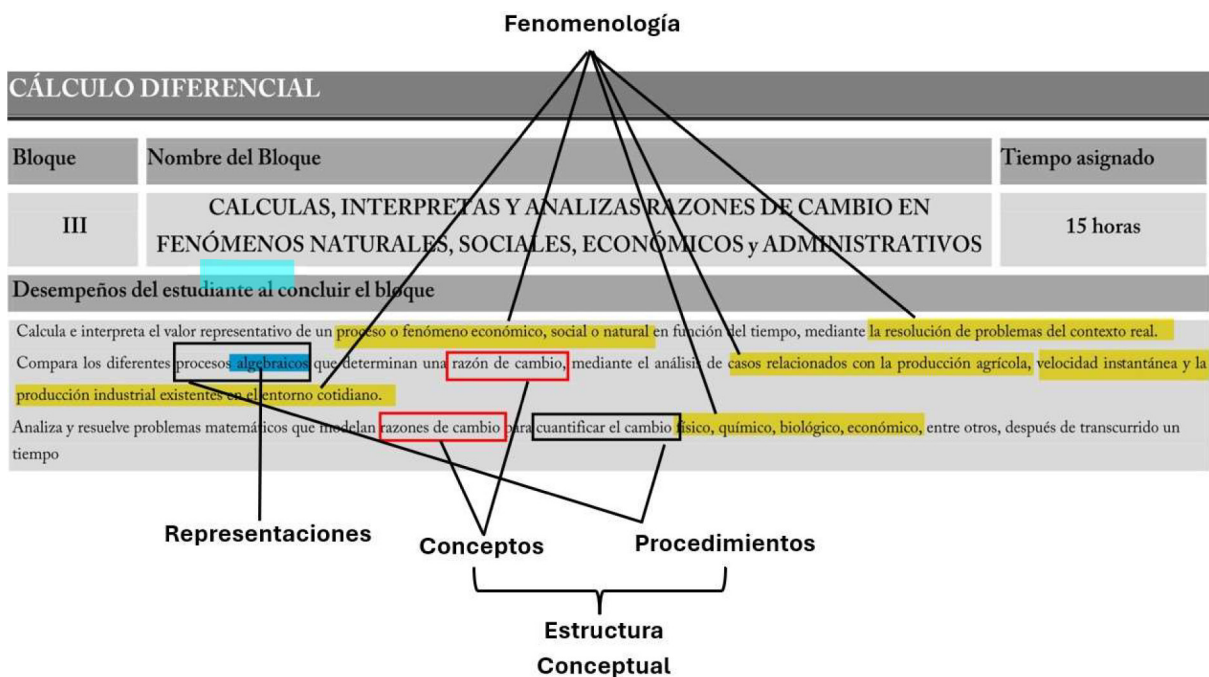
En este apartado se presenta el llenado del instrumento organizador del significado de derivada del programa de estudios y de las planeaciones de los cuatro profesores; además se presentan los significados identificados y la organización de los mismos a través de mapas conceptuales.

Análisis del plan de estudios DGB (2013)

El tema de derivada se ubica en el bloque III, que se nombra “Calculas, interpretas y analizas razones de cambio en fenómenos naturales, sociales, económicos y administrativos”. En la Figura 4 se muestra con un fragmento del plan de estudios de la DGB (2013) cómo se identificaron las componentes del significado utilizando la señalética presentada en la Figura 2. Se hace el análisis a través de los desempeños que propone el programa, sus competencias y las actividades de enseñanza y aprendizaje que se consideran.

Figura 4

Fragmento del programa de estudios DGB (2013) cálculo diferencial



Fuente: DGB, 2013.

En este caso algunas de las componentes del significado identificadas en los fragmentos analizados de la Figura 4 determinan para el campo conceptual de la derivada a la razón de cambio como referente principal, sin embargo, se propone abordarlo bajo procedimientos algebraicos. En este fragmento (Figura 4) no se in-

cluye información de cómo se llevan a cabo esos procedimientos, pero se menciona la cuantificación del cambio como la aplicación de la fórmula de la razón de cambio.

Otra componente que se suma a este significado está descrita en la Tabla 5, donde se añade para dotar de sentido a la razón de cambio a contextos extramatemáticos que van más allá de la velocidad, sumando por ejemplo la producción agrícola o industrial, situados en contextos económicos. Esto fomenta la aplicación del concepto de derivada en diversos fenómenos bajo diversas representaciones. Por ejemplo, entran en relación a la derivada el concepto de límite, la pendiente y los puntos de inflexión favorecidos en distintas representaciones, coincidiendo con lo documentado en el programa:

Compara los diferentes procesos algebraicos que determinan una razón de cambio, mediante el análisis de casos relacionados con la producción agrícola, velocidad instantánea y la producción industrial existentes en el entorno cotidiano [DGB, 2013, p. 24].

Tabla 5

Registro de significados del currículo oficial, programa general de bachillerato de cálculo diferencial (Código: RSPE-1)

Campo conceptual		Sistema de representación	Fenómeno		
Campo conceptual	Campo procedimental		Fenómeno	Contextos	Situación
Razón de cambio	Proceso algebraico	Algebraico	Producción agrícola e industrial Velocidad instantánea	Economía Química Biología	Científica

Fuente: Elaboración propia.

En la sección de objetos de aprendizaje y competencias se identificaron algunos de los elementos del significado y posteriormente su organización en la Tabla 6. Como parte de la estructura conceptual se considera a la razón de cambio como pendiente entre pares ordenados de manera gráfica en un plano con el uso de la fórmula de pendiente, bajo una fenomenología basada en contextos matemáticos y físicos. Otra estructura es la razón de cambio como límite con representación simbólica bajo fenomenología extramatemática, pero no explícita en la situación, ya que menciona “en problema de su entorno”, lo que deja en claro que será en contextos extramatemáticos prioritariamente.

Lo que podemos notar del programa como competencias es la interpretación y argumentación de la razón de cambio por medio de resolución de problemas de forma algebraica. Consideramos que la intencionalidad es considerar este concepto como precedente de la derivada por medio de la pendiente de una secante. Su interpretación de sus variables se da en otros contextos, como por ejemplo velocidad instantánea y aceleración bajo procedimientos algebraicos. En la parte de la fenomenología del programa podemos observar que se adecua a lo documentado en el mismo:

Analiza la producción de una empresa en un determinado tiempo e interpreta la producción promedio, su máxima y mínima, para obtener la razón de cambio promedio [...] En problemas de producción industrial, de física y en química (DGB, 2013, p. 25).

Tabla 6

Registro de significados del currículo oficial (CO), programa general de bachillerato, sección, objetivo y competencias (Código: RSPE-2)

Estructura conceptual		Sistema de representación	Fenomenología		
Campo conceptual	Campo procedimental		Fenómeno	Contextos	Situación
Razón de cambio	Cálculo de la pendiente de una pareja de pares ordenados	Gráfico numérico	Variación de la velocidad	Física	Científica
	Como límite	Algebraico	Problema de entorno	No hay información	Científica y personal
Derivada	Por método algebraico y gráfico	Algebraica y gráfica	No hay información	Física, Química, Biológica, Sociales, Economía y Administración	Científica
Segunda derivada	Interpretar la concavidad	Gráfica	No hay información	Matemático	Científica

Fuente: Elaboración propia.

En la sección de actividades se retoma como referente principal del significado de la derivada a la razón de cambio, donde es promovida desde contextos no matemáticos bajo diferentes representaciones como numérico-tabular, simbólico y gráfico, este último se complementa en representaciones ejecutables por medio de su simulación en *software*. De esta forma el programa considera favorecer significados sobre este concepto en el contexto del movimiento (físico) bajo fenómenos de rapidez, velocidad y aceleración con procedimientos de cálculo algebraico (ver Tabla 7).

Tabla 7

Registro de significados del CO y programa general de bachillerato de cálculo diferencial.

Sección, actividades de aprendizaje y enseñanza (Código: RSPE-3)

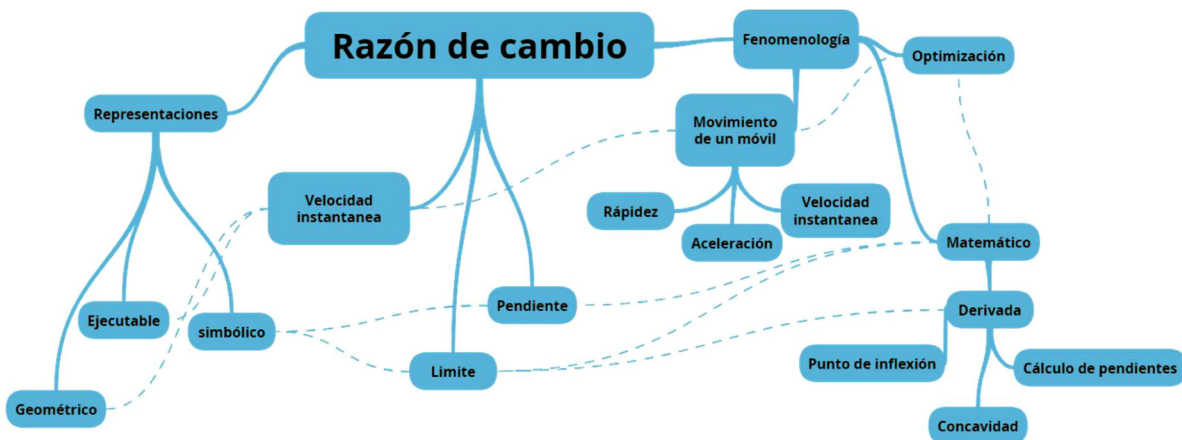
Estructura conceptual		Sistema de representación	Fenomenología		
Campo conceptual	Campo procedimental		Fenómeno	Contextos	Situación
Razón de cambio	Calcular la razón entre el fenómeno con respecto al tiempo	Algebraico Gráfico Numérico Ejecutable	Velocidad y aceleración	Física	Científica
			Producción de: acero y artesanías	Economía	
			Interés simple y compuesto	Administración	
			Contaminación Calentamiento global	Naturales	

Fuente: Elaboración propia.

En los significados de la derivada en la sección de actividades tiende a ser representativamente aplicado el concepto de razón de cambio desde tres contextos fenomenológicos específicos. Se nota una intencionalidad didáctica de la aplicación de la razón de cambio por procedimientos de cálculo por medio de su fórmula de pendiente con cierta ilustración gráfica como se propone en esta sección del programa, sin embargo, se encuentran más conexiones en su representación simbólica de la derivada como límite y pendiente. Para ilustrar las distintas conexiones de los componentes del significado del análisis de contenidos se muestra el mapa conceptual de la Figura 5.

Figura 5

Mapa I. Significados de la derivada en el programa de estudios de cálculo diferencial



Fuente: Elaboración propia.

Análisis de la planeación de clase del Profesor I

En esta sección se presentan los significados identificados en la planeación del Profesor I. Los resultados se presentan divididos en dos secciones según las actividades propuestas. En la Figura 6 se describe la actividad (parte 1) que propone para el tema de la razón de cambio, posteriormente, en la Tabla 8 se ubican las categorizaciones del significado que él propone en esta actividad.

Figura 6

Actividades propuestas por el Profesor I (parte 1)

<p>(Maestro) Actividad: Explicar problemas con razón de cambio utilizando el uso de diferencias (diferencial) (Tiempo: 15/20 min)</p> <p>(Alumno) Actividad: Escribir ejemplos que da el profesor con sus respectivas anotaciones de problemas en donde se utiliza las diferencias.</p>	<p>(Maestro) Tema: Razón de Cambio Propósito: Que el alumno identifique situaciones en la que se presenta la razón de cambio.</p> <p>Actividad: Proporcionar a los alumnos un problema situacional y lectura en la que se mencione la importancia de la derivada como razón de cambio Lugar: Salón de clase (Tiempo 5:50 min)</p>
---	--

Fuente: Planeación del Profesor I.

Para el llenado de la Tabla 8 correspondiente a la planeación de este profesor se registran los significados relacionados con la derivada que propone de la Figura 6. En ella se documenta lo siguiente: “Proporcionar a los alumnos un problema situacional y lectura en la que se mencione la importancia de la derivada como razón de cambio” y “que el alumno identifique situaciones que presenta la razón de cambio”, siendo la razón de cambio el vínculo con el concepto de derivada. El proceso que utiliza es por medio de los diferenciales: “*Explicar problemas de razón de cambios, utilizando el uso de diferencias (diferencial)*”. Para la parte de la fenomenología no brinda información, pero se considera ubicado en contextos matemáticos, esto por los diferenciales como una situación que le es cercana al profesor. Por último, consideramos los sistemas de representación con falta de información dado que no se describe en la planeación del profesor. En la Tabla 8 se registra el significado parcial de la derivada que favorece el Profesor I en la actividad 1 (parte 1).

Tabla 8

Registro de los significados de la planeación didáctica del Profesor I (Código: RSPD-1.1)

Estructura conceptual		Sistema de representación	Fenomenología		
Campo conceptual	Campo procedimental		Fenómeno	Contextos	Situación
Razón de cambio	Uso de diferencias	Sin información	Sin información	Sin información	Personal

Fuente: Elaboración propia.

Las actividades (parte 2) planteadas por el Profesor I mencionan lo siguiente: “Definición de la derivada como la pendiente de la recta tangente” y “que el alumno identifique las fórmulas adecuadas para resolver la derivada de cualquier función”, donde la pendiente se define con relación a límites para encontrar rectas tangentes (Figura 7). En lo que corresponde a las representaciones se ubica en lo algebraico, por el uso de fórmulas de derivación. Respecto a la parte fenomenológica se encuentra en un contexto matemático mediante el uso de fórmulas de derivación, como se identifica en la Tabla 9.

Tabla 9

Registro de los significados de la planeación didáctica, Profesor I (Código: RSPD-1.2)

Estructura conceptual		Sistema de representación	Fenomenología		
Campo conceptual	Campo procedimental		Fenómeno	Contextos	Situación
Derivada	Aplicación de fórmulas de derivación	Simbólico Verbal Gráfico	Fórmulas de derivación	Matemático	Científica

Fuente: Elaboración propia.

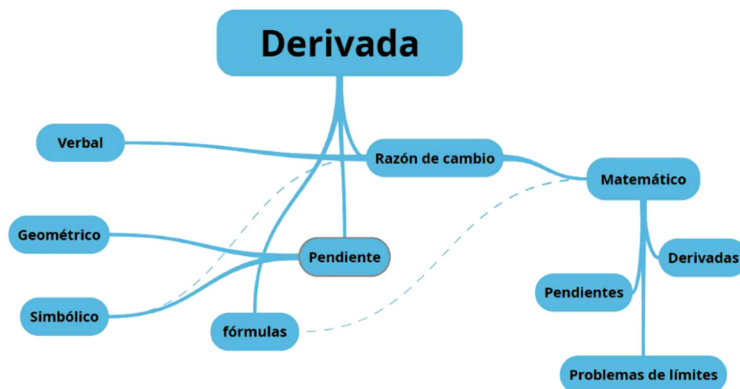
Figura 7
Actividades propuestas por el Profesor 1 (parte 2)

<p>(Maestro) Tema: Definición de Derivada Subtema: Definición de la derivada como la pendiente de la recta tangente Propósito: Que el alumno conozca la definición de derivadas mediante el uso de límites. Actividad: (Tiempo: 5/50) (alumno) Actividad: Tomar apuntes referentes a la definición de la derivada como la pendiente de la recta tangente. (Tiempo: 5/45)</p>	$f(x) = x^r \quad x \in \mathbb{R} \quad f(x) = rx^{r-1}$ <p>LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN POTENCIAL es igual al exponente por la variable elevado a una unidad menos.</p> <p>Ejercicio n° 7) $f(x) = x^4$ Sol: $f(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$</p> <p>Ejercicio n° 8) $f(x) = x^6$ Sol: $f(x) = 6x^{6-1} = 6x^5$</p> <p>Ejercicio n° 9)) $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$ Sol: $f(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$</p>
<p>(Maestro) Tema: La derivada Subtema: Formulario de derivadas Propósito: Que el alumno identifique las fórmulas adecuadas para resolver la derivada de cualquier función Actividad: Escribir el formulario completo de reglas de derivación Lugar: Salón de clase (Tiempo: 10/50 min)</p>	<p>(Maestro) Actividad: Realizar ejercicios para mostrar a los alumnos la forma de derivar funciones haciendo uso de las reglas de derivación. Usar reglas de constante, lineales, polinomios. Proponer ejemplos sencillos para que los alumnos comiencen a familiarizarse. (Tiempo: 10/30 min)</p> <p>(Alumno) Actividad: Realizar los ejercicios de obtención de derivadas de funciones utilizando las reglas de derivación (Tiempo: 10/20 min)</p>

Fuente: Elaboración propia.

De esta manera, podemos representar este análisis y sus relaciones organizando los significados de la derivada que potencia el Profesor I en sus planeaciones en el mapa conceptual de la Figura 8.

Figura 8
Mapa II. Significados de la derivada en la planeación del Profesor I



Fuente: Elaboración propia.

El mapa (Figura 8) ilustra los significados de referencia que el Profesor I propone en conceptos como razón de cambio y pendiente de recta tangente con fórmulas de derivación; por otro lado, estos conceptos (simbólico, verbal y geométrico) se repre-

sentan con más frecuencia en contextos matemáticos, siendo las líneas punteadas el campo procedimental que los relaciona.

Análisis de la planeación del Profesor II

Los significados potenciados en las planeaciones del Profesor II se presentan a continuación. Como intencionalidad didáctica, el Profesor II opta como competencia “calcular, interpretar y analizar razones de cambio en fenómenos naturales, sociales, económicos y administrativos”.

El Profesor II propone la siguiente secuenciación dentro de su planeación:

Profesor. Explica el tema de razón de cambio y ejemplifica algunos problemas aplicados.

Alumnos. Resolverán problemas de aplicación de forma individual o equipos de tres integrantes.


Propósito 1. Que el alumno resuelva los problemas sugeridos por el profesor para ratificar los resultados y corregir sus errores.

Propósito 2. Que el alumno identifique la razón de cambio instantáneo en un problema cotidiano.

El Profesor II propone los siguientes problemas en otras situaciones donde el estudiante utilice la variación en el sentido de generar valores como procedimiento y considerando que su representación es en una tabla numérica. El objetivo de la actividad es relacionar dos variables (dinero-kilómetros y área-perímetro) para así deducir la función que modela dichos valores (Figura 9).

Figura 9

Actividad de la razón de cambio en situaciones extramatemáticas



Actividad 1

Encuentra la función que modela cada uno de los siguientes problemas:

- Una compañía de taxis cobra \$50 por un viaje y \$2 adicionales por cada kilómetro que recorre. Escribe una función que representa la cantidad $P(x)$ de dinero que debe de pagar un pasajero como función del número “ x ” de kilómetros recorridos
- El departamento de recreación de la ciudad planea construir un campo de juego rectangular de 3,600 m². El campo de juego ha de estar rodeado de una cerca. Expresa la cantidad de cerca necesario en función de la medida de la longitud del terreno

Fuente: Planeación del Profesor II.

El Profesor II propone el uso de la fórmula de pendiente con la intención de establecer la relación entre variables tiempo y posición en una situación de movimiento aplicado con datos numéricos en una tabla que se muestra en la Figura 10, siguiendo el marcado para identificar los significados propuestos.

Figura 10

Aplicación de la razón de cambio como pendiente propuesta por el Profesor II como ejemplo

Ejemplo 1.

En una industria se esta probando un nuevo automóvil los ingenieros en diseño determinaron que al circular por una carretera recta la posición que tiene en cada instante de tiempo está determinada por la función:

$$x(t) = t^2 + \frac{1}{2}t^3$$

Donde la distancia que recorre esta medida en metros y el tiempo en segundos. Ellos desean saber la velocidad que alcanza exactamente cuando el tiempo marca 2 segundos.

En otras palabras, requieren conocer la velocidad instantánea en el tiempo $t=2$, esto se logrará por lo pronto, tomando diferentes valores de tiempo para encontrar la posición correspondiente, como se observa en la siguiente tabla,

t	x(t)
0	0
1	1.5
2	8
3	22.5
4	45
5	87.5

En ella se observa la correspondencia que existe entre el tiempo y la posición correspondiente, de acuerdo a la expresión $x(t)$, por ejemplo, cuando han transcurrido 2 segundos, el automóvil se encuentra a 8 m del punto de partida.

En la tabla se observa la manera en que aumenta la distancia del automóvil al ir cambiando de posición conforme pasa el tiempo.

En la asignatura de Física I, estudiaste la velocidad promedio media de objetos en movimiento, y conociste la siguiente fórmula para calcularla:

$$Vm = \frac{x_f - x_o}{t_f - t_o}$$

Fuente: Planeación del Profesor II.

Posteriormente el Profesor II recurre a la visualización del concepto de razón de cambio por medio de la fórmula de pendiente, haciendo distintas aproximaciones a través de valores $\Delta x \rightarrow 0$, con la intención de comprender la tendencia de la recta secante a tangente como límite, a la cual define como derivada de una función. Por último, el Profesor II propone una serie de ejercicios de derivación por medio del uso de sus fórmulas.

La planeación de actividades del Profesor II documenta los significados de la derivada presentados en la Tabla 10. Entre ellos está la razón de cambio, y ejemplifica algunos problemas donde se muestra su definición haciendo uso de la representación tabular, gráfica y simbólica en contextos de la matemática y física. Un segundo significado está asociado con actividades donde los alumnos tienen que interpretar la tendencia de la recta secante a una tangente por medio del límite usando la notación simbólica. Por último, la representación simbólica se utiliza solamente cuando los alumnos usan las reglas de derivación para encontrar la función derivada. Por lo tanto, el Profesor II planea promover en su clase tres significados de la derivada (cada uno asociado a un renglón de la Tabla 10).

Tabla 10

Registro de los significados de la derivada identificados en la planeación del Profesor II

Estructura conceptual		Sistema de representación	Fenomenología		
Campo conceptual	Campo procedimental		Fenómeno	Contextos	Situación
Razón de cambio	Fórmula de pendiente	Gráfica tabular y simbólico	Velocidad instantánea	Físico	Personal
Pendiente de la recta tangente	Límite del cociente incremental	Simbólica y algebraica	Gráfica de rectas	Matemático	Científica
Derivada	Reglas de derivación	Algebraica	Derivación	Matemático	Científica

Fuente: Elaboración propia.

De esta manera, el mapa conceptual del Profesor II (Figura 11) muestra el análisis de los distintos significados de referencia de la derivada asociados a sus representaciones, cuyos procedimientos algorítmicos, en su mayoría, se ubican en contextos matemáticos. El mapa conceptual de la Figura 11 evidencia varios significados de referencia para la derivada y relaciones entre ellos, una gran parte se ubica en el contexto matemático, donde el campo procedimental se centra en el uso de fórmulas y reglas de derivación.

Figura 11

Mapa III sobre el análisis de contenido del Profesor II



Fuente: Elaboración propia.

Análisis de la planeación de la Profesora III

Para el análisis de esta planeación se utilizó la siguiente información propuesta por la Profesora III: “Explica el tema de razón de cambio y ejemplifica algunos problemas aplicados”. Los problemas que propone son de cálculo de volumen de sólidos y de optimización de áreas; las representaciones que utiliza son la gráfica y la simbólica, entre estas también se encuentra la ejecutable, ya que pide a los alumnos que construyan gráficas que les permitan identificar los resultados encontrados con los procesos algebraicos.

La Profesora III propone lo siguiente para el desarrollo de su clase:

- (Actividad) Explica el concepto de puntos de inflexión y ejemplifica mediante problemas prácticos el procedimiento para resolverlos mediante la derivada para encontrar los puntos críticos.
- (Alumnos) Resolverán ejercicios de manera individual haciendo uso de la derivada para encontrar los puntos críticos y verificarán sus resultados con otros compañeros.

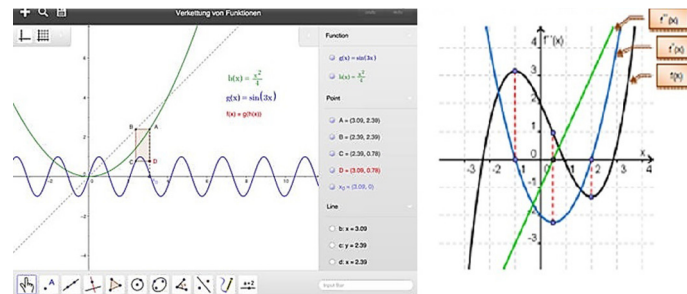
Las actividades para encontrar puntos críticos se componen de procedimientos algebraicos y reglas de derivación, esto es, aplicando las reglas para encontrar puntos críticos de la expresión algebraica que resulta de $f'(x) = 0$. También se usan criterios de la segunda derivada para resolver por procedimientos algebraicos para argumentar sobre la concavidad.

Otra de las propuestas –la cual se ilustra en la Figura 12– es la siguiente:

- (Profesora) Explicará el criterio de la primera derivada para la clasificación de los puntos críticos de una función, ejemplificando con problemas prácticos con procedimientos analíticos y gráficos.
- (Alumnos) Analizarán la gráfica de una función y en base a ella [sic] contestarán algunos cuestionamientos sobre máximos y mínimos, puntos de inflexión y de intervalos.

Figura 12

Uso de rectas tangentes a una curva por medio de un software (representación gráfica-ejecutable)



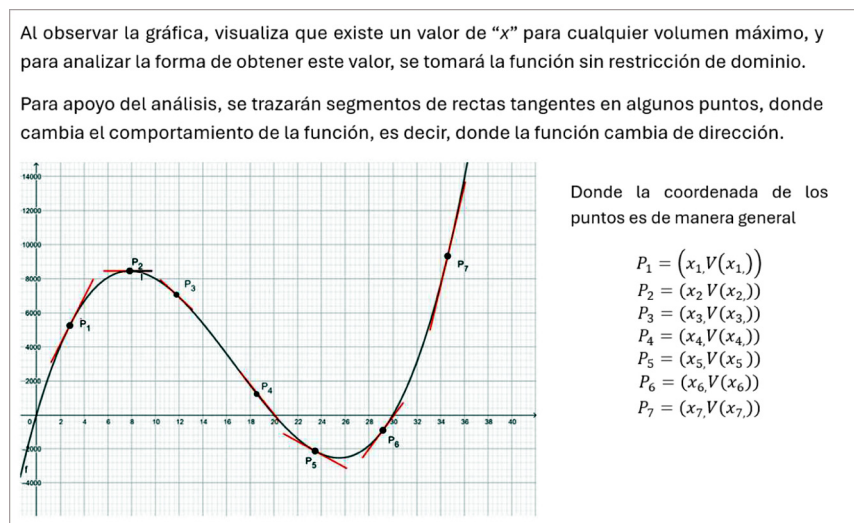
Fuente: Planeación de la Profesora III.

La Profesora III también considera la aplicación de la derivada en los siguientes señalamientos con la actividad de la Figura 13:

- (Maestro) Ejemplifica la clasificación de puntos máximos y mínimos como absolutos o relativos.
- (Alumnos) En equipos de tres integrantes resolverán ejercicios de manera analítica y después usarán un *software* para graficar las funciones dadas e imprimirlas, para analizarlas y obtener los máximos y mínimos relativos y/o absolutos.

Figura 13

Visualización de puntos máximos y mínimos



Fuente: Planeación de la Profesora III.

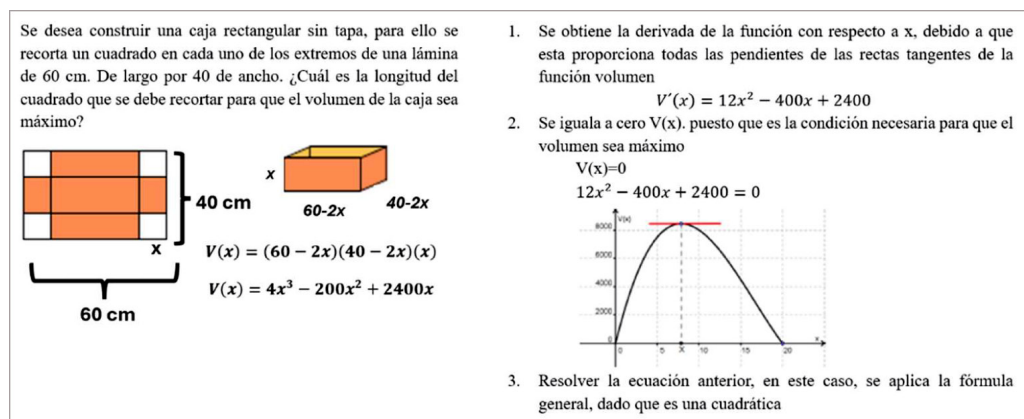
Por último, la Profesora III propone una serie de problemas de aplicación sobre el primer criterio de la derivada en problemas de optimización de área y volumen de figuras geométricas (Figura 14). En esta describe las acciones que realizará para guiar su clase y lo esperado por los estudiantes, de la siguiente manera:

- (Maestra) Facilitará una serie de problemas de optimización.
- (Alumnos) Resolverán en equipo los problemas seleccionados.
- Propósito. Que el alumno aplique el criterio de la primera derivada para solucionar problemas de optimización.

Bajo estas indicaciones la Profesora III considera el problema tradicional de la caja para encontrar el máximo volumen, el resultado se ilustra con su representación gráfica como se muestra en la Figura 14.

Figura 14

Ejemplo de un problemas propuesto de optimización para el área y volumen



Fuente: Planeación de la Profesora III.

De las evidencias expuestas de las actividades planeadas por la Profesora III se muestra el registro de significados que se espera favorecer (Tabla 11).

Tabla 11

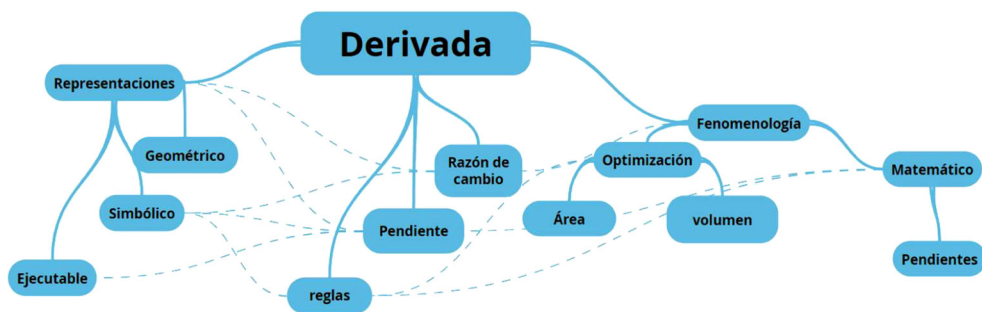
Registro de los significados de la planeación del Profesor III (Código: APD-3)

Estructura conceptual		Sistema de representación	Fenomenología		
Campo conceptual	Campo procedimental		Fenómeno	Contextos	Situación
Razón de cambio	Cálculo de pendiente	Númérico Simbólico	Velocidad	Física	Científica
Primera y segunda derivada	Aplicar derivada Factorizar Graficar	Simbólico Gráfico ejecutable y numérico	Optimización	Geometría	Científica
Pendiente recta tangente	Trazado de tangente	Gráfico		Matemático	Científica
Derivada como regla	Derivación y factorización	Algebraico- Simbólico		Matemático	Científica

Fuente: Elaboración propia.

En los resultados de la información obtenida se utilizan como aspectos procedimentales los límites para realizar aproximaciones y encontrar la pendiente de la recta tangente; las representaciones que podemos observar son simbólicas, cuando lo hace por medio de los límites, otra cuando se presenta por medio de gráficas en un registro ejecutable (*software*). El aspecto gráfico se favorece para el significado de la derivada para ilustrar los criterios de la primera y segunda derivadas (Figuras 13 y 14), aunque existen actividades que recurren a las reglas de derivación. Fenomenológicamente la optimización está orientada a la geometría de cálculo de áreas y volúmenes. En la Figura 15 se presenta el mapa conceptual de los significados de la derivada potenciados por la Profesora III.

Figura 15
Mapa IV. Análisis de contenido del Profesor III



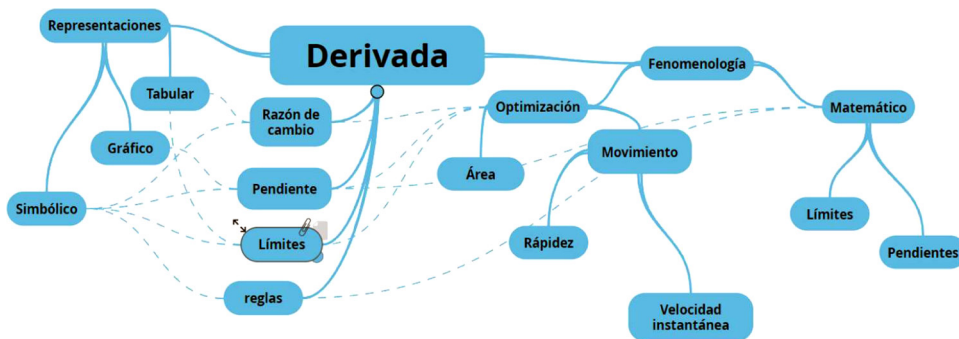
Fuente: Elaboración propia.

En el análisis de la planeación de la Profesora III existe una equitatividad parcial de las distintas representaciones utilizadas en los conceptos de razón de cambio y pendiente, donde el campo procedimental relativo a las reglas de derivación. Lo simbólico es tratado en los tres referentes de la estructura conceptual de la derivada y llevado a la fenomenología por medio de la optimización en contextos de área y volumen. Se recurre al uso tecnológico para representar la pendiente. La representación semiótica que predomina en las planeaciones de esta profesora es el registro simbólico.

Análisis de la planeación del Profesor IV

Por cuestiones de extensión del documento, solo se muestra en la Figura 16 el mapa conceptual de los significados de la derivada que se identifican del análisis de las planeaciones del Profesor IV.

Figura 16
Mapa V sobre el análisis de contenido del Profesor IV



Fuente: Elaboración propia.

En las planeaciones del Profesor IV se proporcionan problemas de optimización de áreas de terrenos y tareas de cálculos de velocidades de un móvil, en los cuales se pide realizar tablas, gráficas y fórmulas que representen el problema. Otra sugerencia es explicar por medio de la fórmula la pendiente, la razón de cambio, y hacer una representación gráfica por medio de la recta tangente en varios puntos; sin embargo, se encuentra la representación simbólica para derivar por medio de límites o por fórmulas de derivación. La representación que utiliza es la simbólica por medio de reglas de derivación, aunque la fenomenología se presenta en varios ámbitos, casi todos están relacionados a la representación simbólica.

Con lo anterior se tiene información de análisis de cuatro planeaciones de profesores y del programa de Bachillerato, con lo que ahora se pueden hacer relaciones de cómo están organizados con los significados desde sus planeaciones didácticas.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

A manera de reflexión se puede entender lo siguiente: con base en los resultados obtenidos de las tablas que permiten ver la organización de significados y su ilustración por medio de mapas se puede considerar que el programa presenta varios significados desarticulados con las planeaciones de los profesores. Esto se puede afirmar en dos vertientes: que en las planeaciones estén menos significados de los que plantea el programa o que, en caso contrario, las planeaciones de los profesores estén más amplias que este.

El programa propone como concepto de referencia “razón de cambio”, al cual define como parte de su estructura conceptual en tres contextos que son, velocidad instantánea, pendiente de la recta secante y como límite; estos tres significados como definiciones son representados en lo simbólico, ejecutable y geométrico, aunque se pueden ver aspectos fenomenológicos en distintos contextos, como son físicos, matemáticos y laborales (industrial y agronomía), su relación con estos en su mayoría

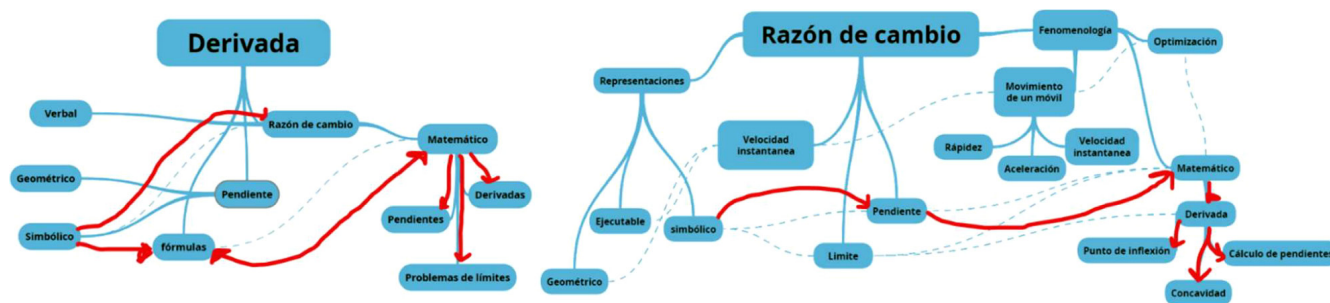
con representación simbólica, es decir, con mucha carga procedimental algorítmica. Esto se puede comprobar en los mapas de las planeaciones docentes, lo que significa una influencia algorítmica en actividades extramatemáticas, lo que permite considerar una tendencia hegemónica de aprendizaje algorítmico de este concepto. Esta influencia se aprecia en comparaciones de las planeaciones con el programa de estudios a continuación.

Comparación programa de estudios y Profesor I

Con respecto a la planeación del Profesor I se puede encontrar lo siguiente: la derivada, según su estructura conceptual, se define en tres significados de referencia, los cuales son: como razón de cambio, pendiente y fórmula de derivación, y estos en representaciones verbales, geométrica y simbólica. Se encuentra que el significado simbólico o algebraico (razón de cambio) se aplica en contexto matemático como parte de su fenomenología y que no coincide con el programa de estudios, el cual propone mayores conexiones. Es decir, lo señalado con líneas rojas muestra rutas donde queda expresado lo simbólico, como significado que más conexiones presenta (Figura 17). Comparando ambos mapas conceptuales vemos que el Profesor I organiza su contenido en el contexto matemático, a diferencia del programa de estudios por medio de la razón de cambio, que es vista desde el contexto fenomenológico.

Figura 17

Comparación de los significados de la derivada en el programa de estudios y planeación I



Fuente: Elaboración propia.

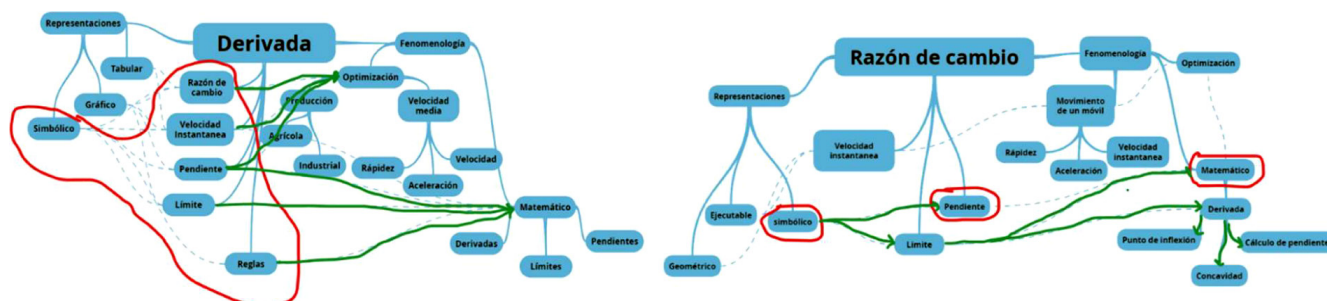
Comparación programa de estudios con el Profesor II

Con respecto a la segunda planeación, esta presenta más significados que el programa, de los cuales se pueden resaltar los conceptos de razón de cambio, velocidad instantánea, pendiente de la recta tangente, límite y reglas de derivación en representaciones tabular, gráfico y simbólico; la fenomenología está organizada por medio de la optimización en varios contextos como son de producción, velocidad de un móvil y lo matemático. En comparación con el programa, este maneja más significados, pero convergen en la representación simbólica, ya que este tiene más relaciones que en las

demás. Esto evidencia que el significado simbólico es el que mayormente favorece el profesor (Figura 18, izquierda).

Algo relevante es que los significados de referencia que maneja el Profesor II están más relacionados que el programa, es decir por ejemplo los conceptos razón de cambio, velocidad instantánea y pendiente de una recta presentan relaciones (señaladas en verde, Figura 18) en contextos no matemáticos como la producción –industria y agricultura– en procedimientos que involucran la optimización.

Figura 18
Comparación planeación II y programa de estudios

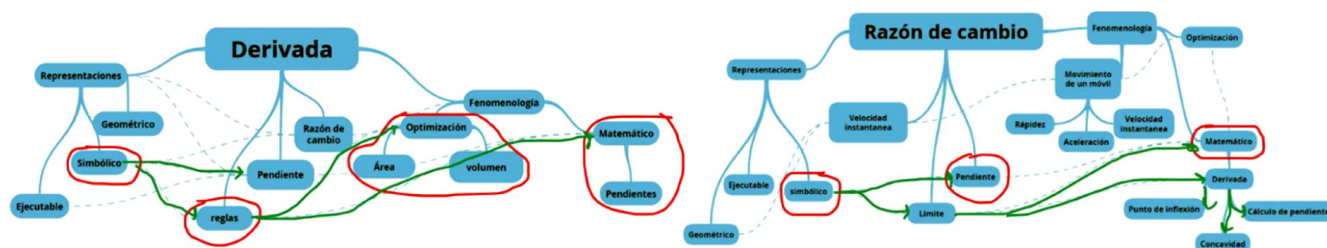


Fuente: Elaboración propia.

Comparación programa de estudios con la Profesora III

Con respecto a la tercera planeación, se definen tres significados de referencia, los cuales son razón de cambio, pendiente de la recta tangente y reglas de derivación; sin embargo, utiliza las mismas representaciones del programa, pero en la parte de la fenomenología se inclina hacia los contextos matemáticos, solo la razón de cambio se inclina a contextos de optimización y los significados de pendiente de la recta tangente y reglas de derivación en contextos matemáticos (Figura 19).

Figura 19
Comparación planeación III y programa de estudios



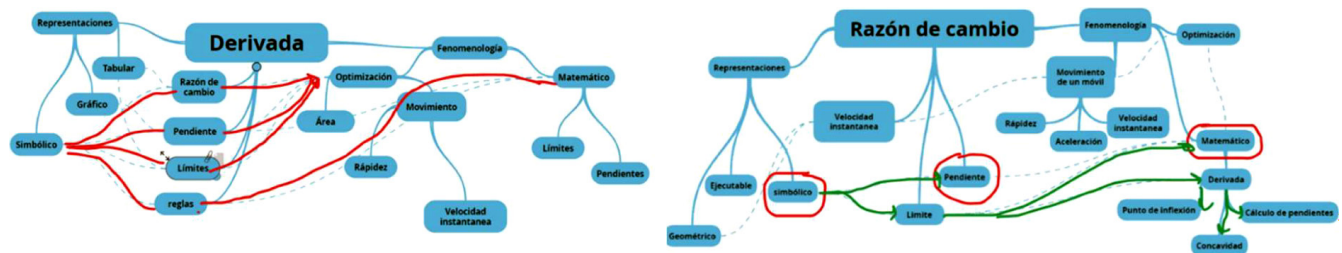
Fuente: Elaboración propia.

Comparación programa de estudios con el Profesor IV

La última planeación no difiere mucho de las demás, ya que la representación simbólica tiene más relaciones (imagen izquierda de Figura 20), pero después de esta se usan las representaciones tabulares y gráficas. Los significados de referencia de la derivada que se manejan son razón de cambio, pendiente de la recta tangente, límite de una función y reglas de derivación; los contextos que utiliza son matemáticos, en fenómenos que modelan los significados de referencia enfocados en la optimización.

Figura 20

Comparación planeación IV y programa de estudios



Fuente: Elaboración propia.

CONCLUSIONES

Con este análisis de las planeaciones al igual que el programa se favorece la representación simbólica de la derivada, pero esto no es lo relevante, sino que los significados no se encuentran muy relacionados entre sí; por otro lado cabe mencionar que existen planeaciones que no están hechas conforme al programa, o mejor dicho carecen de algunos aspectos que menciona, ya sea que están hechas por medio de su experiencia o por medio de libros de texto u otras fuentes, pero también existen planeaciones que presentan más significados que el programa, y están más relacionados. Es decir, existe una diferencia notoria entre el currículo oficial y el potenciado por el profesor.

En ese sentido, existe una diversidad de significados de la derivada propuestos en las planeaciones, y estos, al menos en este análisis, no son relacionados entre sí debido a que la mayoría de los profesores favorece una representación simbólica de la derivada, siendo esta la más usual en su práctica docente. Esto puede ser un factor de esta desconexión de significados dado que no se favorece en otras representaciones y contextos fenomenológicos amplios donde el estudiante pueda establecer un panorama de los usos de la derivada. En síntesis, lo que esta investigación brinda con esta evidencia es la necesidad de establecer tareas en contextos fenomenológicos que relacionen a la derivada en su aplicabilidad de fórmulas y no restringirse al significado procedimental de la derivación con una fuerte carga simbólica. Este trabajo muestra, de forma visual en los mapas, la multiplicidad de significados que

brinda en el proceso de enseñanza la derivada, resaltando la parte simbólica como significado más representativo en el estudiante. Esto, en un sentido didáctico, limita un abanico de comprensión de este concepto en su aplicabilidad en otros contextos para su enseñanza, además del poco uso de representaciones ejecutables. Desde luego la intención del profesor es establecer el uso del concepto en otros contextos pero, al menos desde las planeaciones docentes, es aún complejo considerando procesos de formación continua del diseño de tareas que involucren el análisis de los tres componentes del significado descritos en este documento. Por lo tanto, se considera como una evidencia susceptible de problematizar el hecho de que los significados que asimila un estudiante de la derivada se reducen a pocas representaciones y contextos fenomenológicos de su significado en tareas que favorezcan sus relaciones. Desde luego que esto requiere de procesos de formación docente continua en la planeación y organización de un contenido matemático ante los nuevos cambios curriculares.

REFERENCIAS

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas)* (pp. 97-140). Iberoamérica.
- Barboza, J., y Castro, W. (2023). Criterios emergentes y asociados a la idoneidad didáctica para la enseñanza del perímetro por futuros profesores de matemáticas. *Formación Universitaria*, 16(1), 11-22. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062023000100011>
- Briceño, E., Hernández, J., y Espino, A. (2018). Análisis de la comprensión de la derivada desde el enfoque gráfico en estudiantes de nivel superior. *El Cálculo y su Enseñanza*, 10(1), 31-48. <https://doi.org/10.61174/recacym.v10i1.23>
- Caballero, M. A. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato* [Tesis de Maestría no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México.
- Cañadas, M., y Gómez, P. (2014). Apuntes sobre análisis de contenido. Módulo 2 de MAD 3. Bogotá: Universidad de los Andes, Bogotá. <http://hdl.handle.net/1992/39916>
- Cañadas, M. C., y Pinzón, A. P. (2018). Análisis de contenido. En P. Gómez (ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53-112). Uniandes. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/analisis-de-contenido/>
- Castro, W., Cadavid, G., y Pino-Fan, L. (2015). *Significados para la derivada en un curso universitario de Matemáticas* [Ponencia]. XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Chiapas, México. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/significados-para-la-derivada-en-un-curso-universitario-de-matematicas/>
- Chaverri-Hernández, J. J., Hernández-Arce, K., Castillo-Céspedes, M. J., Vallejos-Meléndez, D., y Picado-Alfaro, M. (2020). ¿Qué modos de uso propone el profesorado de matemáticas en formación inicial para la enseñanza del teorema de Pitágoras en educación secundaria? *Uniciencia*, 34(1), 88-110. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.34-1.6>
- Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7a. ed.). Routledge.
- Cordero, F., Cen, C., y Suárez-Téllez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana en Matemática Educativa*, 13(2), 187-214. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33515995004>
- Cuevas, C. A., y Pluvínage, F. (2013). Investigaciones sobre la enseñanza del cálculo. *El Cálculo y su Enseñanza*, 4(1), 47-64. <https://doi.org/10.61174/recacym.v4i1.156>

- Desfitri, R. (2016). In-service teachers' understanding on the concept of limits and derivatives and the way they deliver the concepts to their high school students. *Journal of Physics: Conference Series*, 693, 012016pp. 1-9. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/693/1/012016>
- DGB [Dirección General de Bachillerato] (2013, sep. 2). *Matemáticas IV*.
- Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (coord.). *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 155-181). Iberoamérica.
- Galindo Illanes, M. K., y Breda, A. (2023). Significados de la derivada en los libros de texto de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. *Boletim de Educação Matemática*, 37(75), 271-295. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n75a13>
- García González, M. d. S., y Flores Crisólogo, D. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 12(46). <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/560>
- Gómez, P. (2009). Procesos de aprendizaje en la formación de inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 471-498. <https://www.redalyc.org/pdf/2931/293121936022.pdf>
- Gómez, P., y Carulla, C. (2001). Desarrollo didáctico de los profesores de matemáticas. El caso de los sistemas de representación y la función cuadrática. *Educación Matemática*, 13(2), 31-54. <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol13/2/03Gomez.pdf>
- Hernández, J., Briceño, E., y Castro, A. (2023). Estructura conceptual de la derivada en currículos hispanos de matemáticas. En A. Cuevas, M. Martínez y J. Hernández (coords.), *Investigaciones y experiencias en enseñanza de las ciencias y matemáticas* (pp. 53-68). UNAM/Aldus. <http://hdl.handle.net/20.500.11799/138309>
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista P. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill.
- Hernández, J., Zamora, R., y Lupiáñez, J. L. (2020). Estudio comparativo de los significados y expectativas de aprendizaje del límite en tres libros y el currículo oficial. *PNA*, 14(4), 241-269. <https://doi.org/10.30827/pna.v14i4.13736>
- Lupiáñez, J. L., y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, 3(1), 35-48. <https://doi.org/10.30827/pna.v3i1.6190>
- León, N., Bara, M., y Azocar, K. (2013). Planificación de la matemática escolar como elemento clave en la formación del docente. *Paradigma*, 32(2), 177-200. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2013.p177-200.id524>
- Mora, A., y Ortiz, J. (2013). Aprender a enseñar matemáticas desde la planificación. En R. Flores (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26* (pp. 381-389). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/aprender-a-ensenar-matematicas-desde-la-planificacion/>
- Paternina-Borja, O., y Juárez-Ruiz, E. (2023). Planeación de clase para enseñar simetrías: escenario para caracterizar el conocimiento didáctico de una profesora de matemáticas. *Revista Lasallista de Investigación*, 20(1), 67-82. <https://doi.org/10.22507/rli.v20n1a5>
- Reséndiz, E. (2010). El discurso en la clase de matemáticas y los acuerdos sociales. La noción de variación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-I), 99-112. <https://doi.org/10.12802/relime.22.2520>
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39-63. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.4>
- Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 9(33), 11-27. <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/801>
- Rico, L., y Fernández-Cano (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (eds.), *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Comares.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, (58), 7-23.
- Rodríguez Nieto, C. Á., Rodríguez Vasquez, F. M., y García García, J. (2021). Una visión desde la red de teorías

- TAC-EOS sobre el papel de las conexiones matemáticas en la comprensión de la derivada. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 12(1), 202-220. <https://doi.org/10.16949/turkbilmat.797182>
- Sánchez, G., García, M., y Linares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 267-296. <https://doi.org/10.12802/relime.22.2520>
- Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10(3), 24-36.
- Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate. En E. Dubinsky, A. Shoenfeld y J. Kaput (eds.), *Research in collegiate Mathematics education. IV CBMS Issues in Mathematics Education* (vol. 8, pp. 103-127). American Mathematical Society.

Cómo citar este artículo:

Briceño Solís, E. C., Hernández Sánchez, J. A., y Morales de la Cruz, J. A. (2024). ¿Qué significados de la derivada favorece un profesor en su planeación de clase? *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 15, e1975. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v15i0.1975



Todos los contenidos de *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH* se publican bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional, y pueden ser usados gratuitamente para fines no comerciales, dando los créditos a los autores y a la revista, como lo establece la licencia.